C E N A

BD-008

INTRODUÇÃO À MECÂNICA RELATIVÍSTICA

Newton Bernardes

26 de julho de 1 972

BOLETIM DIDÁTICO

CENTRO DE ENERGIA NA AGRICULTURA

USP - CNEN

ESCOLA SUPERIOR DE AGRICULTURA "LUIZ DE QUEIROZ"

PIRACICABA-SP

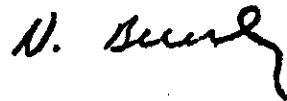
BRASIL

APRESENTAÇÃO

Os dois capítulos, DINÂMICA DE UMA PARTÍCULA e SISTEMAS DE PARTÍCULAS, aqui apresentados constituem a primeira terça parte de um curso de Introdução à Física, orientado na direção da Física Atômica. O curso completo foi ministrado durante o segundo semestre de 1971 aos alunos do 1º ano da Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiróz" e aos alunos do curso Introdução a Energia Nuclear na Agricultura, do Centro de Energia Nuclear na Agricultura, ambos de Piracicaba, em dezesseis semanas, de quatro horas de aulas cada.

Durante cada sessão, foram discutidos vários exercícios e problemas que não se encontram no texto, assim como uma atividade moderada de laboratório.

Isoladamente, estes dois capítulos, constituem uma Introdução à Mecânica Relativística atraves de princípios e caminhos originais e inéditos.

O caminho histórico à Relatividade a partir de fenômenos óticos foi abandonado porque nele, a amplidão da Relatividade pode passar desapercebida.

Nosso primeiro capítulo, propositadamente, mostra a estruturação de uma teoria como um entrelaçamento de idéias e fatos nitidamente independentes. A ciência envolve descobertas, mas invenções, além de importantes,são necessárias.

O segundo capítulo contém o desenvolvimento da Dinâmica dos Sistemas. Aqui tentei esclarecer dois pontos frequentemente obscurecidos: 1) os parâmetros dinâmicos do sistema, tais como massa de repou

so e 2) a exatidão da chamada Relatividade Restrita ou Especial, mesmo em casos onde existe interação.

Minha tarefa foi facilitada pela participação do pessoal do CENA e do Departamento de Física da ESALQ, pois sem essa oportunidade, seria incerta a realização deste trabalho.

Piracicaba, outubro de 1971

N. Bernardes

NEWTON BERNARDES
Catedrático da U.S.P.

ÍNDICE

página

continuação página

I - DINÂMICA DE UMA PARTÍCULA

1. VELOCIDADE

Queremos, inicialmente, estudar o movimento de um OBJETO suficientemente pequeno face à precisão dos nossos instrumentos de medida, de modo que sua posição instantânea, em relação a um referencial R, possa ser especificada pelas três coordenadas de um único ponto. Nessas condições de aproximação o objeto será denominado PARTÍCULA PUNTIFORME, ou simplesmente PARTÍCULA. Não é necessário que a partícula seja "material" no sentido vulgar da palavra. Por exemplo, podemos estudar o movimento da luz, que poderá também ser considerada como partícula se, num dado instante, a sua presença se manifestar numa região suficientemente pequena de modo que possamos definir as coordenadas da sua posição sem ambigüidade. Se com nossos aparelhos podemos perceber que um objeto é constituído de mais de uma partícula, denominamos êsse objeto de SISTEMA.

Para uma partícula puntiforme, podemos definir sua velocidade instantânea, $\vec{v}^{(R)}$, em relação a um referencial R como

$$\vec{v}^{(R)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}^{(R)}}{\Delta t} = \frac{dx^{(R)}}{dt}$$

ou, abreviadamente

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Na discussão do movimento de uma partícula, além de sua velocidade, estão envolvidos outros conceitos, principalmente: MASSA, MOMENTUM e ENERGIA, que passamos a discutir.

2. MASSA

O conceito de massa sempre esteve presente nas discussões do movimento de uma partícula. NEWTON, o grande formulador da dinâmica, por volta de 1670, definia MASSA como "a quantidade de matéria em um corpo". Embora seja difícil saber exatamente o que NEWTON queria dizer, é certo que para êle a massa de um corpo era uma propriedade INTRÍNSECA, isto é, uma propriedade que não depende de NENHUMA relação do objeto com o resto do UNIVERSO. O atributo ESSENCIAL da massa é a INÉRCIA, isto é, a incapacidade de um objeto mudar sua posição em relação a um referencial particular, sem a intervenção de outros objetos. Portanto, para NEWTON, a inércia é algo intrínseco do objeto. Essa atitude é até hoje adotada pela maioria dos físicos, embora seja válida uma posição crítica. Por exemplo, hoje é aceitável a conjectura da possibilidade da massa ou inércia de um objeto ser, não uma propriedade intrínseca, mas sim uma propriedade global do objeto face ao Universo.

LAVOISIER, em 1780, realizou experiências mostrando que o pêso dos produtos da fermentação do açúcar era igual ao pêso dos ingredientes antes da fermentação, concluindo que "em tôdas as operações da arte e da natureza nada é criado; uma igual quantidade de matéria existe tanto antes como depois da experiência; a qualidade e a quantidade dos elementos permanecem exatamente as mesmas e nada acontece além de mudanças e modificações na combinação dêsses elementos". Assim, as experiências de LAVOISIER constituem a base para um dos axiomas fundamentais de tôda a ciência, qual seja o PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA, que pode ser enunciado sob uma das seguintes formas:

"É impossível alterar por qualquer processo a MASSA de um sistema isolado".

ou

"Se um processo altera a MASSA de um sistema, então podemos concluir que concomitantemente se altera a MASSA de um outro sistema de forma que a MASSA total do Universo permanece constante".

De uma forma ou de outra o princípio da conservação da massa é um axioma básico de tôda a ciência. Vamos denotá-lo por A1 e exprimí-lo em símbolos matemáticos por

$$\Delta M = 0 \qquad A1$$

subentendendo um SISTEMA ISOLADO.

Mais recentemente, em 1905, EINSTEIN concluiu que há uma EQUIVALÊNCIA entre MASSA e ENERGIA, abrindo a possibilidade da conversão recíproca entre massa e energia. De qualquer maneira a Física até hoje não é capaz de formular com precisão o conceito de massa, que assim, permanece vago. No entanto, essa indefinição parece não prejudicar o desenvolvimento da Física. É até possível, que o conceito de massa seja supérfluo, embora útil, na Física. Essas questões serão novamente discutidas mais adiante.

3. MOMENTUM OU QUANTIDADE DE MOVIMENTO

DESCARTES, por volta de 1640, foi o primeiro a introduzir o produto mv, da massa pela velocidade, como

uma medida do "movimento contido num corpo". Para DESCARTES, a quantidade total de movimento de um corpo era constante, isto é, da mesma forma como para LAVOISIER a MASSA ou a "quantidade de matéria" de um corpo não podia ser alterada, também o MOMENTUM, mv, ou a "quantidade de movimento" de um corpo não mudava, permanecendo constante. A ideologia de DESCARTES foi severamente criticada no século XVII, mas apesar disso NEWTON fez bom uso do conceito de MOMENTUM e formulou as condições em que a "quantidade de movimento" podia ser forçada a variar, e introduziu o conceito de FÔRÇA como uma medida da VARIAÇÃO DE MOMENTUM ocorrida durante um intervalo unitário de tempo.

Embora as palavras momentum e quantidade de movimento tenham se tornado sinônimos na língua portuguesa, vamos preferir o uso do vocábulo MOMENTUM para indicar o produto mv, e vamos denotá-lo pelas letras p ou P.

A conservação do MOMENTUM total de um sistema isolado é outro princípio básico da Física, e podemos enunciar o PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DO MOMENTUM sob uma das seguintes formas:

> "É impossível alterar por qualquer processo o MOMENTUM de um sistema isolado".

ou

> "Se um processo altera o MOMENTUM de um sistema então podemos concluir que concomitantemente se altera o MOMENTUM de um outro sistema de forma que o MOMENTUM total do Universo permanece constante".

Vamos denotar êsse axioma por A2 e exprimí-lo em símbolos matemáticos por

$$\Delta \vec{P} = 0 \qquad \text{A2}$$

subentendendo um SISTEMA ISOLADO.

P1. Um objeto livre próximo à superfície da Terra cai com uma velocidade crescente, aumentando portanto o seu MOMENTUM. Qual parte do Universo tem o seu MOMENTUM concomitantemente alterada? Qual foi o Referencial adotado?

P2. Um objeto de massa igual a 1 kg se encontra, inicialmente, a uma altura de 2 km acima da superfície da Terra. O momentum total em relação a um bom referencial é, pois, nulo. Êle cai verticalmente percorrendo um certo intervalo de tempo a distância de 1 km. Já que o momentum total se conserva, podemos concluir que nesse mesmo intervalo de tempo a Terra adquiriu uma certa velocidade em sentido contrário. Calcule a distância percorrida pela Terra nesse intervalo de tempo.

P3. Das suas observações GALILEU concluiu que todos os corpos próximos à superfície da Terra caem com a MESMA aceleração. Baseado no Princípio da Conservação do Momentum prove que essa afirmação vale só aproximadamente, e que na verdade os corpos mais pesados caem com aceleração maior.

P4. Repita o problema P2 substituindo os valores 1 kg e 2 km pelos valores correspondentes à massa e à distância da Lua à Terra.

Dos resultados dêsses problemas vemos que certos efeitos são muito pequenos para serem observados normalmente. No caso da queda dos corpos a conservação do momentum, i.e. o recuo da Terra, só poderia ser constatada experimentalmente se a massa do objeto que cai fosse comparável à massa da Terra. No entanto, em várias outras situações em que as massas dos objetos em movimento relativo são, entre si, da mesma ordem de grandeza, podemos constatar que o momentum total permanece constante.

4. ENERGIA

O conjunto das idéias de DESCARTES foi severamente criticado e combatido no século XVII, tendo como principal opositor LEIBNITZ. LEIBNITZ propôs em 1686 que em vez do MOMENTUM, uma medida adequada da "quantidade de movimento contido em um corpo" era dada pelo produto da massa pelo quadrado da velocidade, mv^2, que êle denominava FÔRÇA VIVA. Em têrmos de hoje o conceito de FÔRÇA VIVA corresponde ao dôbro da ENERGIA CINÉTICA, $\frac{1}{2} mv^2$. A energia de um objeto é um índice da sua capacidade de produzir alterações no Universo. A energia CINÉTICA depende sòmente do estado de MOVIMENTO do objeto, e não da sua POSIÇÃO em relação ao Universo.

No século XIX o conceito de energia foi estendido para incluir a idéia de que mesmo em repouso um corpo tem energia LATENTE, ou seja, mesmo em REPOUSO êsse corpo pode produzir alterações no Universo. Em geral o repouso é devido a vínculos ou inibições que impedem o movimento em potencial. É o caso, por exemplo, de um objeto em repouso próximo à superfície da Terra suspenso por um fio. Removidos os vínculos o corpo entra em movimen-

to e adquire energia CINÉTICA. A êsse tipo de energia latente devido à situação do objeto em relação ao Universo (ou seja, devido à configuração do Universo) chama-se ENERGIA POTENCIAL. Assim estendido, o conceito de energia passou a ser tal que o "conteúdo de energia de um corpo" em qualquer instante era repartido em duas partes: uma, a ENERGIA CINÉTICA, devido ao movimento instantâneo, e outra, a ENERGIA POTENCIAL, devido à posição instantânea do corpo em relação ao Universo (configuração instantânea do Universo) que podia modificar, isto é, acelerar, o movimento do corpo e portanto, transformar-se em energia cinética. Em símbolos matemáticos podemos escrever:

$$E = U + T(p)$$

onde E é a energia total, U a energia potencial e T a energia cinética.

A ENERGIA POTENCIAL é definida de tal forma que pode haver uma conversão total de energia cinética em energia potencial e vice versa. Portanto, as duas formas de energia são concebidas de tal forma que a ENERGIA TOTAL de um corpo, pensada como a SOMA de sua energia cinética com a sua energia potencial, se CONSERVA havendo apenas transformação recíproca das duas formas de energia. Isso significa que a configuração instantânea do Universo pode alterar o movimento das suas partes, assim como êsse movimento pode alterar a configuração do Universo.

EXEMPLO: GALILEU estudando a queda dos corpos sob a ação da gravidade concluiu em 1590 que:

1) a velocidade v de um corpo em queda livre no vácuo a partir do repouso aumenta proporcionalmente com o tempo, isto é,

$$v = gt$$

ao passo que

2) o espaço h percorrido por êsse corpo aumenta com o quadrado do tempo, isto é,

$$h = \frac{1}{2} gt^2$$

Disso podemos concluir que a ENERGIA CINÉTICA dêsse corpo, $T = \frac{1}{2} mv^2$ aumenta assim

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m(gt)^2 = \frac{1}{2} mg^2t^2$$

Se queremos descobrir qual deve ser a expressão da ENERGIA POTENCIAL U em termos da POSIÇÃO h do corpo, de tal forma que a ENERGIA TOTAL $E = T + U$ se mantenha constante, basta escrever

$$T + U = \frac{1}{2} mg^2t^2 + U(h) = \frac{1}{2} mg^2t^2 + U = \text{const.}$$

ou seja,

$$U = \text{const.} - \frac{1}{2} mg^2t^2 = \text{const.} - mg\left(\frac{1}{2} gt^2\right) = \text{const.} - mgh$$

Se escolhermos uma certa altura h_o arbitràriamente como a posição em que a energia POTENCIAL do corpo é nula, temos $U = mgh_o - mgh = mg(h_o - h)$, e a ENERGIA TOTAL, se escreve pois,

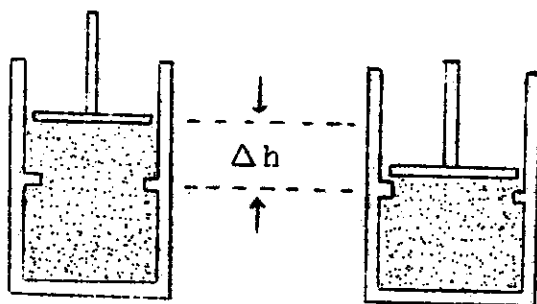
$$E = U(h) + T(v) = mg(h_o - h) + \frac{1}{2} mv^2$$

P5. Estudo do movimento de um pêndulo, i.e., $v = v(\theta)$ e $\theta = \theta(t)$ a partir de $E = T + V = \text{const.}$

---

5. OUTRAS FORMAS DE ENERGIA

Em várias situações do cotidiano podemos observar que a soma da energia cinética com a energia potencial não permanece constante. Como exemplo bastante simples podemos considerar o processo pelo qual um corpo de massa m partindo com uma certa velocidade v_o deslisa sôbre um plano horizontal com atrito, o que produz um decréscimo de sua velocidade até que finalmente o objeto atinge o repouso. Dessa forma, a energia cinética inicial $\frac{1}{2} mv_o^2$ foi totalmente dissipada, não tendo ocorrido nenhuma transformação de energia cinética em energia potencial, embora seja possível reconhecer fàcilmente certas ALTERAÇÕES no objeto, como, por exemplo, um aumento de temperatura.

Um outro exemplo de situação em que parece haver dissipação de energia é o seguinte: um gás está contido num cilindro hermético provido de um pistão sem atrito que pode se mover na vertical.

Se o pistão fôr suficientemente pesado, face à pressão exercida pelo gás, êle abandonado por si só, se deslocará para baixo. Supondo a existência de um impecilho qualquer, o pistão atingirá o repouso a uma altura Δh abaixo da posição inicial. Nesse caso, apesar de não haver ocorrido nenhuma variação de energia cinética do pistão, hou-

ve uma diminuição da sua energia potencial igual a $mg\Delta h$. É claro, portanto, que a energia total do pistão não se conservou, tendo havido uma dissipação de energia potencial igual a $mg\Delta h$. No entanto, aqui também podemos fàcilmente observar que houve aumento de temperatura do gás, do cilindro e do pistão.

A análise de situações como estas conduziu a uma AMPLIAÇÃO ou EXTENSÃO do conceito de energia, para incluir o CALOR como uma forma de ENERGIA TÉRMICA, de modo que nos nossos exemplos, em vez de dizer que houve um desaparecimento de uma quantidade de energia igual a $\frac{1}{2} m_o v^2$ ou $mg\Delta h$, diríamos, no primeiro exemplo, que houve uma transformação de energia CINÉTICA em CALOR ou energia TÉRMICA, e no segundo exemplo uma transformação de energia POTENCIAL em energia TÉRMICA. As investigações de RUMFORD (1798), MAYER (1842) e JOULE (1842), demonstraram que a aparente dissipação de uma certa quantidade de energia mecânica, isto é, tanto energia cinética como energia potencial, de um sistema isolado produziam sempre um mesmo acréscimo da ENERGIA TÉRMICA do sistema medido como um acréscimo de TEMPERATURA. Embora essa energia térmica nem sempre pudesse vir a ser totalmente convertida de volta em energia cinética ou energia potencial do sistema, a energia anteriormente dissipada não havia sido perdida, e permanecia no sistema. Assim, além de energia CINÉTICA e energia POTENCIAL, um sistema tem uma ENERGIA INTERNA, se bem que essa energia interna é na verdade energia cinética e energia potencial de partes do sistema, partes estas (moléculas) que por serem muito pequenas,as suas configurações e os seus movimentos não são percebidos pelos aparelhos ordinários.

Assim, foi possível estender o conceito de conservação da energia de um sistema isolado, uma vez re-

conhecido o CALOR como forma de energia. A análise de situações análogas conduziu a reconhecer várias outras formas de energia, tais como: LUMINOSA, ELÉTRICA, MAGNÉTICA, QUÍMICA, etc.

Dessa forma, na segunda metade do século XIX, um novo princípio foi incorporado como princípio básico de tôda ciência, o PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DA ENERGIA, que pode ser enunciado sob uma das seguintes formas:

> "É impossível alterar por qualquer processo a ENERGIA de um sistema isolado".

ou

> "Se um processo altera a ENERGIA de um sistema, então podemos concluir que concomitantemente se altera a ENERGIA de um outro sistema de forma que a ENERGIA total do Universo permanece constante".

Vamos denotar êsse axioma por A3 e exprimí-lo em símbolos matemáticos por

$$\Delta E = 0 \qquad \text{A3}$$

subentendendo um sistema isolado.

Da mesma forma que os princípios da conservação da massa e da conservação do momentum, o princípio da conservação da energia é básico para tôda a Física. Se em algum processo observa-se que a energia aparentemente não se conserva, somos obrigados a investigar a existência de uma nova forma de energia, até então desconhecida. Da mesma forma para a massa e para o momentum.

PRINCÍPIOS DE CONSERVAÇÃO

A partir do fim do século XIX, tôda a Física se apoia, pois, nos três princípios básicos de conservação: de massa, de momentum e de energia, que em símbolos matemáticos podem ser escritos:

$\Delta M = 0$ (A1) $\Delta P = 0$ (A2) $\Delta E = 0$ (A3)

No início, êsses três princípios de conservação foram baseados em observações experimentais limitadas. Por exemplo, uma variação de massa da ordem de uma parte em um milhão teria passado desapercebida nas medidas de Lavoisier, dada a precisão insuficiente de suas balanças. No entanto, os Princípios de Conservação são tão fundamentais que devemos encará-los não como uma extrapolação de uma série ampla, porém limitada, de observações empíricas, mas sim como AXIOMAS fundamentais para tôda a Ciência.

Além dêsses três princípios de conservação a Física adota princípios de conservação adicionais. Por exemplo, em fenômenos onde se manifesta a carga elétrica podemos observar, dentro da precisão dos nossos instrumentos de medida de carga, que a carga elétrica total de um sistema isolado não se altera. Extrapolando essa verificação empírica para TODO e QUALQUER processo, adotamos o Princípio da Conservação da Carga Elétrica cujo enunciado é análogo a A1, A2 e A3.

Na aplicação de qualquer Princípio de Conservação é ESSENCIAL que o sistema esteja ISOLADO, caso contrário podemos ser levados a uma falsa conclusão. Com o progresso da Ciência os sistemas de nosso interêsse ficam cada vez mais delicados e consequentemente sua análise, cada vez mais complexa. Em fenômenos que envolvem o núcleo atômico é comum observar processos em que a massa aparentemente não se conserva. Por exemplo, da colisão entre um próton (p) e um neutron (n) pode resultar um deuteron (D), ou seja, um núcleo de hidrogênio pesado. Escrevendo êsse processo como: $p + n \longrightarrow D$, é fácil observar

um aparente déficit de massa, já que os valores bem conhecidos das massas dessas três partículas são aproximadamente:

$m_p = 1,672 \cdot 10^{-24}$ g , $m_n = 1,675 \cdot 10^{-24}$ g , $m_D = 3,343 \cdot 10^{-24}$ g

Êsses números indicam uma APARENTE diminuição de massa igual a $0,004 \cdot 10^{-24}$ g. No entanto, uma análise cuidadosa da reação acima nos mostra que além de deuteron uma outra partícula (raio γ) é formada, e que essa partícula, que normalmente escapa do sistema, carrega o déficit de massa.

Um outro exemplo é dado pela DESINTEGRAÇÃO BETA expontânea do neutron. Um neutron no VÁCUO se desintegra (estatìsticamente) dentro de 12 minutos, produzindo um próton e um elétron: $n \longrightarrow p + e$. Sendo a massa do elétron igual aproximadamente a $0,001 \cdot 10^{-24}$ g, há novamente uma aparente diminuição de massa, da ordem de $0,002 \cdot 10^{-24}$ g $(= 1,675 - 1,672 - 0,001)$. Aquí também uma análise cuidadosa da reação nos mostra que juntamente com o próton e o elétron, uma terceira partícula (um neutrino) é emitida e que nela reside o déficit de massa.

A análise de processos nucleares como êsses é bastante complexa, devendo, por exemplo, ser levado em conta a velocidade das partículas que participam da reação, assim como a relação entre massa e energia. Oportunamente, êsses processos nucleares serão discutidos.

Para ressaltar a importância dos Princípios de Conservação podemos salientar que por volta de 1930, já havia sido observada a aparente diminuição de massa na desintegração BETA. Uma análise cuidadosa do processo não revelava a presença de NENHUMA PARTÍCULA ENTÃO CONHECIDA. Em vez de aceitar a VIOLAÇÃO da Conservação da Massa, foi preferível admitir a existência de uma NOVA PARTÍCULA ATÉ ENTÃO DESCONHECIDA, o neutrino. Sòmente 20 anos depois foi o neutrino observado de uma maneira mais direta.

'. ANÁLISE CRÍTICA DOS PRINCÍPIOS DE CONSERVAÇÃO

Apesar de que a MASSA, a ENERGIA e o MOMENTUM de um sistema ISOLADO se conservam, o mesmo não acontece com um sistema ou partícula que não estejam isolados. Se uma partícula não está isolada do resto do Universo, o seu MOVIMENTO, isto é, a sua velocidade varia, e consequentemente variam a sua energia cinética e momentum. As outras partes do Universo sofrem uma variação em sentido contrário, de tal modo que a MASSA, a ENERGIA e o MOMENTUM do Universo permanecem constantes.

A variação da ENERGIA e do MOMENTUM de uma partícula não isolada é um fato óbvio da EXPERIÊNCIA COTIDIANA. No entanto, dessa experiência não é óbvio se a MASSA varia ou não. Na verdade essa experiência LIMITADA indica que a MASSA não varia com a mudança de movimento de um objeto. Essa indicação LIMITADA é condizente com a idéia newtoniana de que a MASSA é a quantidade de MATÉRIA em um corpo, e como tal, deve permanecer inalterada sob tôdas as circunstâncias. Essa conclusão precisa ser analisada mais detidamente por duas razões: 1ª) o conceito de MASSA como "quantidade de MATÉRIA" é vago e 2ª) a experiência do cotidiano é LIMITADA, não excluindo a possibilidade de que em certas circunstâncias não usuais a MASSA de um objeto possa variar. Essa questão será analisada mais adiante.

. O TEOREMA DAS FORÇAS VIVAS E OS FUNDAMENTOS LÓGICOS

Vamos analisar as variações de energia cinética e de momentum de uma PARTÍCULA não isolada, sob um ponto de vista geral. Nosso objetivo é estabelecer uma relação entre a variação de energia cinética ΔT de uma

PARTÍCULA e a variação correspondente do seu momentum $\Delta\vec{p}$. Queremos estabelecer uma relação entre ΔT e $\Delta\vec{p}$ que não envolva o conceito vago de massa. Essa relação virá a ser

$$\Delta T = \vec{v}\Delta\vec{p}$$

ou seja, "uma PEQUENA variação de momentum $\Delta\vec{p}$ de uma partícula é acompanhada de uma pequena variação de energia cinética ΔT, cujo valor é igual a $\vec{v}\Delta\vec{p}$, onde $\vec{v}$ é a velocidade da partícula".

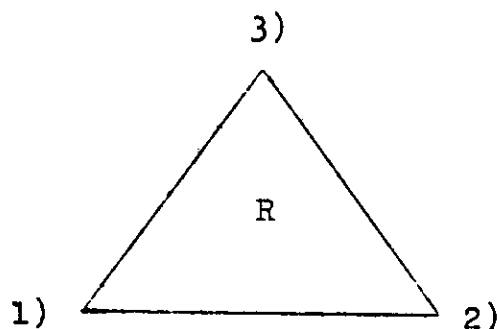
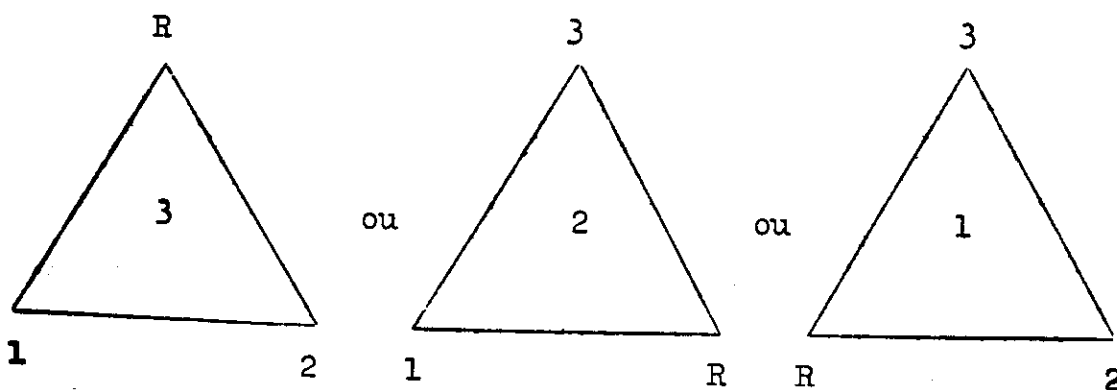
Essa relação será chamada de RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA DINÂMICA, RFD, porque é uma relação que vale independentemente do conceito particular de massa.

Antes de discutir a Relação Fundamental da Dinâmica em tôda sua generalidade vamos, por razões didáticas, DEDUZIR um resultado equivalente, a partir dos conceitos limitados de massa, velocidade, momentum e energia cinética da mecânica newtoniana. O ponto de vista de Newton pode ser resumido nas três afirmações seguintes:

1) a MASSA de uma partícula é por DEFINIÇÃO uma CONSTANTE (isto é, não se altera em nenhuma circunstância) porque expressa algo INTRÍNSECO da partícula, ou seja, a "quantidade de matéria";

2) o MOMENTUM $\vec{p}$ de uma partícula de massa m e velocidade $\vec{v}$ é por DEFINIÇÃO igual a $m\vec{v}$;

3) a ENERGIA CINÉTICA T de uma partícula de massa m e velocidade $\vec{v}$ é por DEFINIÇÃO igual a $\frac{1}{2} mv^2$.

Dessas três verdades axiomáticas, decorrem relações entre m, $\vec{p}$ e T que por serem decorrências puramente lógicas são necessàriamente válidas, sempre que forem válidas os três axiomas, 1), 2) e 3). Se chamarmos de R uma dessas decorrências lógicas podemos colocar os axiomas 1), 2) e 3) nos vértices de um triângulo equilátero, e a verdade R no centro do triângulo:

para simbolizar que R é uma decorrência lógica de 1), 2) e 3). No entanto, podemos colocar R em um dos vértices, por exemplo, no superior, passando o axioma lá situado para o inferior do triângulo por exemplo assim:

para simbolizar, por exemplo, no primeiro esquema que dos axiomas 1), 2) e R) decorre como necessidade lógica a verdade 3). Assim vemos que:

A) Num conjunto de três axiomas podemos substituir um deles por um TEOREMA R, BEM ESCOLHIDO, sem alterar a estrutura da doutrina;

e

B) Se mantivermos sòmente 2 dos 3 axiomas, e negarmos o terceiro, então quase tôdas as verdades R serão agora inverdades (a não ser aquelas triviais que só dependem dos dois axiomas mantidos).

Uma relação importante, do tipo R, é a seguinte:

de 3) $T = \frac{1}{2} mv^2$ temos $dt = m\vec{v} . d\vec{v}$;

de 1) $m = const.$ temos $dm = 0$ e portanto,

$m d\vec{v} = d(m\vec{v})$;

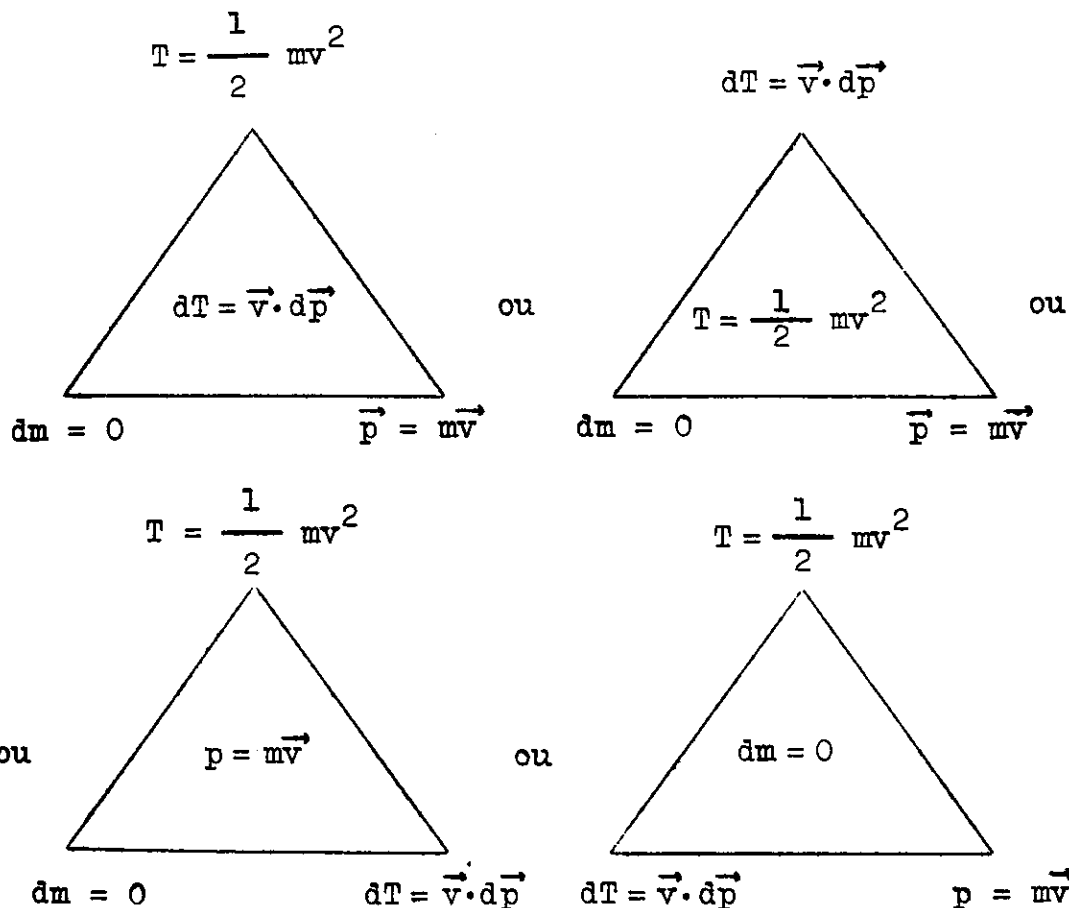
de 2) $\vec{p} = m\vec{v}$ e de 1) $dm = 0$, temos $d\vec{p} = m d\vec{v}$

Portanto, podemos concluir que

$$dT = m\vec{v} . d\vec{v} = \vec{v} . d(m\vec{v}) = \vec{v} . d\vec{p}$$

ou seja,

$$R) \quad dT = \vec{v} . d\vec{p}$$

Reportando ao esquema do triângulo podemos portanto simbolizar:

que significa que, em cada um dos esquemas, se tomarmos como AXIOMAS as afirmações situadas nos vértices, a afirmação situada no centro do triângulo será NECESSÀRIAMENTE uma verdade, ou seja, uma decorrência lógida, i.e., um teorema.

No caso do primeiro esquema o teorema $dT = \vec{v} \cdot d\vec{p}$ é o chamado TEOREMA DAS FORÇAS VIVAS, TFV, que usualmente é apresentado sob outra forma, a saber:

Escrevendo $\vec{v}$ como $\frac{d\vec{x}}{dt}$ podemos escrever

$$dT = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot d\vec{p} \qquad \text{ou então,} \qquad dT = d\vec{x} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Newton chamava a "variação de momentum por unidade de tempo $\frac{d\vec{p}}{dt}$" de FÔRÇA $\vec{F}$ e assim temos

$$dT = \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

e o produto $\vec{F} \cdot d\vec{x}$ é chamado o trabalho $d\mathcal{T}$ realizado sôbre a partícula. Temos portanto,

$$dT = d\mathcal{T}$$

ou seja,

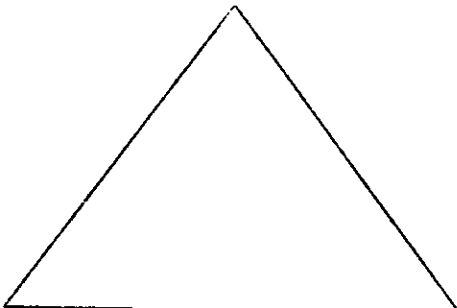
> "A variação da energia cinética de uma partícula é igual ao trabalho realizado sôbre ela".

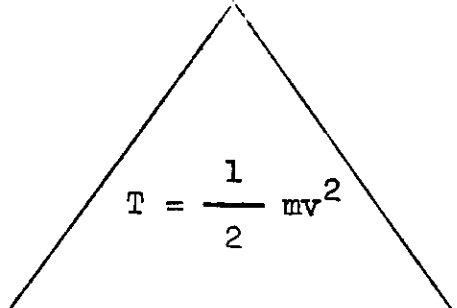
No entanto, a relação $dT = \vec{v} \cdot d\vec{p}$ é mais geral que o enunciado acima do TFV, já que ela envolve os conceitos adicionais de FÔRÇA e TRABALHO.

• A RELAÇÃO FUNDAMENTAL E OS FUNDAMENTOS LÓGICOS

A relação, que daquí por diante será abreviada por RFD,

$$\boxed{dT = \vec{v} \cdot d\vec{p}}$$

é tão fundamental como os três axiomas newtonianos: 1) $dm = 0$; 2) $\vec{p} = m\vec{v}$ e 3) $T = \frac{1}{2} mv^2$. Na verdade, a RFD é de um certo ponto de vista até mais fundamental que alguns dos três axiomas newtonianos, pois, se escrevermos $dT = \vec{v} \cdot d\vec{p}$ no caso de um movimento retilíneo, $dT = vdp$,

sob a forma

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dp}{dt}$$

vemos que a RFD, significa que "independentemente das suas definições os conceitos de MOMENTUM e ENERGIA CINÉTICA são COMPLEMENTARES, pois AQUILO que é medido pela variação temporal do momentum é também medido pela variação espacial da energia cinética". Uma relação dêsse tipo é muito mais fundamental, por exemplo, que uma definição a priori, axiomática e rígida de energia cinética igual a $\frac{1}{2}mv^2$, que poderia sem nenhum prejuízo real ser substituída, por exemplo, por mv^4 ou $\frac{1}{2}mv^4$ ou $\frac{1}{4}mv^4$ ou por alguma expressão semelhante, sem contradizer a priori o conteúdo básico do conceito de energia cinética, qual seja: $T(v = 0) = 0$ e $T(-v) = T(v)$, isto é, a energia cinética de uma partícula em repouso é nula, e a energia cinética depende só do módulo da velocidade da partícula e não da sua direção. A razão para tomar a energia cinética NEWTONIANA como $T = \frac{1}{2}mv^2$ pode ser compreendida pelo 2º esquema triangular da pg. 18, ou seja: queremos, 1) que a massa seja invariável; 2) que o momentum seja, $p = mv$; e 3) que a variação temporal de p seja igual à variação de T. Dêsses três requisitos decorre que T deve ser igual a $\frac{1}{2}mv^2$.

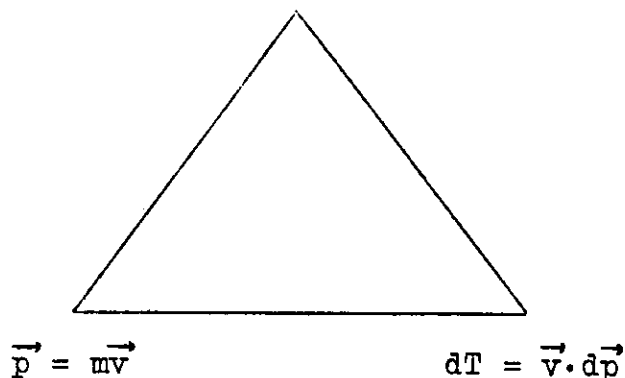
No entanto, não podemos simplesmente tomar a RFD $dT = \vec{v} \cdot d\vec{p}$ como axioma em substituição à definição newtoniana $T = \frac{1}{2}mv^2$ mantendo os outros dois axiomas newtonianos: 1) $dm = 0$ e 2) $\vec{p} = m\vec{v}$, assim

porque isso acarretaria com o teorema: $T = \frac{1}{2} mv^2$ assim:

Se quisermos desviar do esquema newtoniano devemos, pois, abandonar MAIS UM dos dois axiomas restantes, ou $\vec{p} = m\vec{v}$ ou $m = const.$ A definição de momentum como o produto da massa pela velocidade difìcilmente poderia ser substituída por outra expressão com o mesmo conteúdo. Já a conservação ou invariabilidade da massa, $dm = 0$, é uma verdade baseada apenas em:

1) CONCEITO VAGO de massa como quantidade de matéria, e

2) FATO LIMITADO, da conservação da massa em reações químicas, queda dos corpos, etc.

É possível, pois, manter a definição de momentum como $\vec{p} = m\vec{v}$, e abandonar a invariabilidade da massa, estabelecendo o esquema:

buscando para o vértice superior um terceiro axioma baseado em:

1) um CONCEITO AMPLO de massa, que não esteja em contradição com NENHUM FATO;

ou

2) FATOS GERAIS, mais gerais que a conservação da massa.

Quanto a FATOS GERAIS, mais gerais que a conservação da massa, a experiência não os revela. Devemos, pois, buscar uma idéia "a priori" acêrca do conceito de massa cuja generalidade não possa ser negada por NENHUM FATO experimental.

Que essa idéia "a priori" deve ser uma relação entre massa e energia cinética podemos ver do seguinte modo:

Da definição de momentum, $\vec{p} = m\vec{v}$, temos

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} \tag{1}$$

que substituída na RFD, $dT = \vec{v} \cdot d\vec{p}$ nos dá

$$mdT = \vec{p} \cdot d\vec{p}$$

ou, integrando ambos os membros

$$\int mdT = \frac{p^2}{2} \tag{2}$$

Para efetuarmos a integração indicada no primeiro membro precisamos estabelecer uma relação entre massa e energia cinética. Uma vez estabelecida essa relação podemos efetuar a integração, obtendo assim da Eq.(2) a relação entre energia cinética e momentum, ou pela Equação (1), entre energia cinética e velocidade.

Se escolhermos a massa como uma constante m, independente da energia, a Eq.(2) depois de efetuada a integração nos dará

$$mT + C = \frac{p^2}{2}$$

onde C é uma constante de integração, cujo valor é zero, já que a energia cinética deve ser nula para uma partícula em repouso, i.e., $T(p = 0) = 0$. Assim, teríamos $T = \frac{p^2}{2m}$, ou usando a Eq. (1), $T = \frac{1}{2} mv^2$. Assim, podemos concluir que se escolhemos o conceito de massa como um atributo intrínseco da partícula, invariável sob quaisquer circunstâncias, então as equações fundamentais $\vec{p} = m\vec{v}$ e $dT = \vec{v} \cdot d\vec{p}$ implicam que a energia cinética é igual a $\frac{1}{2} mv^2$, como já esperávamos.

. EQUIVALÊNCIA ENTRE MASSA E ENERGIA

Assim, devemos estabelecer um NOVO conceito de massa, baseado em alguma IDÉIA FUNDAMENTAL, que não esteja, porém, em contradição com a experiência limitada do cotidiano. Essa idéia fundamental é a EQUIVALÊNCIA entre MASSA e ENERGIA. Embora essa equivalência não seja decorrência ÓBVIA de nenhum fato ou de nenhuma idéia mais simples, ela nos conduz a uma visão do Universo muito mais simples e muito mais ampla do que a visão newtoniana, baseada na constância e invariabilidade da massa de uma partícula. A equivalência entre massa e energia foi deduzida por EINSTEIN em 1905, seguindo outros caminhos. As suas consequências se estendem desde os movimentos intra-atômicos até à Cosmologia. A relação entre massa e energia é a MAIOR DESCOBERTA da Física nos últimos 300 anos.

A equivalência entre massa e energia, funde êsses dois conceitos em um só, que podemos chamar de massa ou de energia. Dado o acúmulo de conceitos formados sob a tradição da mecânica de Newton durante vários séculos é mais conveniente manter a ENERGIA como o conceito FUNDAMENTAL e olhar a MASSA como uma FORMA particular de energia. No entanto, qualquer forma de energia cinética, potencial, térmica, etc, pode em princípio ser convertida em massa, isto é, naquilo vulgarmente chamado de matéria, e vice-versa. Outro aspecto da equivalência entre massa e energia é que qualquer forma de energia deve ter o atributo essencial da massa, ou seja, INÉRCIA. Ainda mais a equivalência entre massa e energia funde os princípios da conservação da massa e da conservação da energia em um só.

1. AS UNIDADES DE MASSA E DE ENERGIA

Para exprimir a equivalência entre massa e energia temos a dificuldade de que, por razões históricas, essas duas grandezas são medidas em unidades diferentes, por exemplo, massa em gramas e energia em ergs. Na verdade, isso representa só uma inconveniência e não uma dificuldade. A situação é análoga à equivalência mecânica do calor descoberta experimentalmente por Mayer e por Joule em 1842. Essa equivalência entre trabalho mecânico e calor significa, segundo as investigações de Joule, que quando uma certa quantidade de trabalho $\mathfrak{T}$ é realizado e dissipado sôbre um sistema, por exemplo sôbre uma certa quantidade de água, o efeito produzido é sempre igual ao efeito que seria produzido por uma determinada quantidade de calor Q, independentemente da forma particular da energia, isto é, se cinética, potencial, elétrica, etc, que foi dissipada. Isso significa que o efeito de $\mathfrak{T}$ JOULES é o mesmo que o efeito de Q CALORIAS. Portanto, podemos exprimir a equivalência entre calor e trabalho pela equação

$$\mathfrak{T} = JQ$$

onde J é o chamado equivalente mecânico da caloria, e vale segundo as investigações de Joule, 4,18 joule/caloria. O valor numérico resulta igual a 4,18 porque tanto a caloria como o joule já haviam sido definidos anteriormente como unidades de grandezas independentes.

Na equivalência entre massa e energia a situação é a mesma. Não podemos exprimir essa equivalência simplesmente pela equação

$$m = E$$

porque tanto a unidade de massa como a unidade de energia

já foram definidas anteriormente como unidades de grandezas independentes. Por isso a equivalência entre massa e energia deve ser escrita sob a forma

$$m = \alpha E$$

onde α é uma constante cujo valor numérico depende das unidades prèviamente escolhidas para a massa e para a energia. Assim como o valor do equivalente mecânico do calor é J = 4,18 joule/caloria, o valor de α será por exemplo, "tantas gramas por erg", ou "tantos kilogramas por joule".

Tomando o caso de uma partícula puntiforme, que é o mais simples, escrevemos

$$m = \alpha E = \alpha \left[E_o(*) + T(p) \right] \qquad (3)$$

onde separamos a energia total E da partícula, em duas partes: uma energia cinética T(p) que, subentendido um referencial R, depende do seu estado de movimento, e uma energia $E_o(*)$ que depende da configuração do Universo, duma maneira complicada e em geral conhecida só fenomenològicamente. Em vez de chamar E_o de energia potencial, vamos chamá-la de ENERGIA DE REPOUSO, porque ela é a forma de energia que atribuimos a uma partícula desprovida de energia cinética, isto é, de movimento, ou seja, em repouso. Essa energia de repouso E_o pode depender de uma maneira complicada da sua posição face ao resto do Universo. E_o pode depender mesmo da história do Universo, isto é, não só da sua posição instantânea face ao Universo, mas do conjunto das suas posições dentro do Universo, durante um certo intervalo de tempo. Essa dependência complexa mesmo que não seja evidenciada pelos fatos experimentais, não deve ser posta de lado por razões simplistas.

A Eq. (3) pode ser escrita como

$$m = m_o + \alpha\, T(p) \qquad (4)$$

onde $m_o = \alpha\, E_o(*)$ é a parte da massa correspondente à ENERGIA DE REPOUSO e por isso pode ser chamada de MASSA DE REPOUSO. A Eq. (4) implica que a massa de uma partícula varia com a sua velocidade. A massa aumenta com a velocidade se α fôr positivo e diminui se α fôr negativo. Se α fosse negativo, poderia acontecer que para valores bastante grandes de T(p) o têrmo negativo αT viesse a ser maior que m_o resultando uma massa total negativa. Da mesma forma, uma partícula que tivesse massa de repouso nula teria sempre uma massa negativa. Por essas razões devemos tomar a constante α como um número positivo. Em vez de se exprimir a equivalência entre massa e energia pela equação $m = \alpha E$, costuma-se exprimí-la pela equação

$$\boxed{E = mc^2} \qquad (5)$$

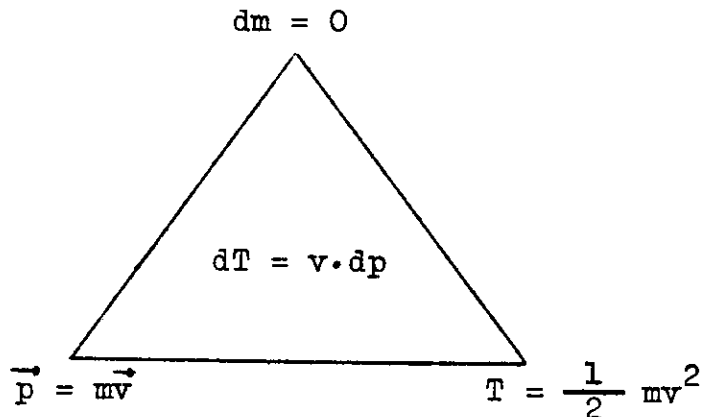
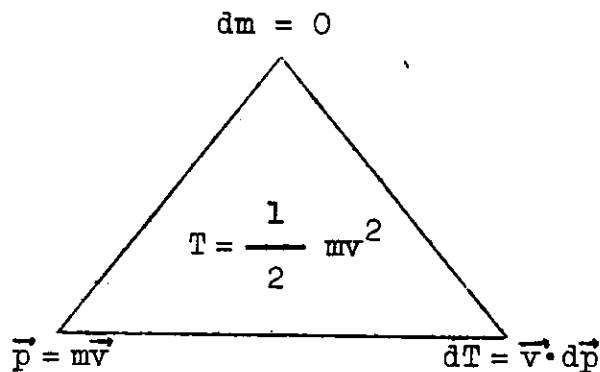
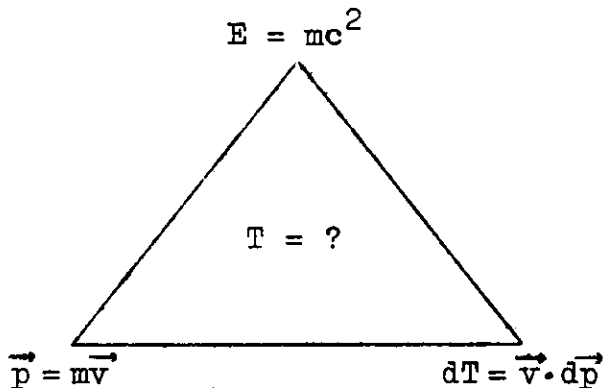
onde $c^2 \equiv 1/\alpha$, sendo lícito escrever $1/\alpha$ como um quadrado c^2, porque α deve ser tomado como positivo. Portanto, escrevemos a Eq. (4) sob a forma

$$m = \frac{1}{c^2}\,(E_o + T) \qquad (6)$$

onde E_o/c^2 é a massa de repouso, ou seja, a massa newtoniana comum, cujo valor para uma dada partícula só se conhece fenomenològicamente (isto é, através da experiência; por exemplo, a massa de repouso do elétron é dada pela experiência como igual a $9\cdot10^{-28}$ g, mas não temos nenhuma explicação para êsse valor), ao passo que o acréscimo de massa T/c^2 devido ao movimento será deduzida através da Equação (2).

---

2. VARIAÇÃO DA MASSA COM A VELOCIDADE

O axioma newtoniano da invariabilidade da massa, $dm = 0$, será pois, substituído pelo axioma einsteniano da equivalência entre massa e energia, $E = mc^2$. Em têrmos do esquema do triângulo, vemos que o esquema newtoniano

ou o seu equivalente, como discutido no § 9

será substituído pelo esquema einsteniano.

Uma vez estabelecida a relação entre massa e energia cinética, dada pela Eq. (6) podemos integrar o primeiro membro da Eq. (2), ou seja

$$\frac{1}{c^2}\int (E_o + T)dT = \frac{p^2}{2}$$

que, efetuando a integração, nos dá

$$\frac{1}{c^2}\left(E_oT + \frac{T^2}{2}\right) + A = \frac{p^2}{2} \qquad (7)$$

onde A é uma constante de integração. O significado da energia cinética T é tal que quando p = 0, T também é igual a zero, isto é, T(p = 0) = 0. Fazendo p = 0 na Equação (7) podemos concluir que a constante de integração A é nula, e ficamos portanto com

$$\frac{1}{c^2}\left(E_oT + \frac{T^2}{2}\right) = \frac{p^2}{2}$$

que, multiplicando ambos os membros por $2c^2$ nos dá

$$(T^2 + 2E_oT) = p^2c^2$$

que, completando-se o quadrado no primeiro membro, nos dá

$$(T + E_o)^2 - E_o^2 = p^2c^2 \qquad (8)$$

Como $T + E_o$ é a ENERGIA TOTAL E, podemos escrever a Eq. (8) como

$$\boxed{E^2 = E_o^2 + p^2c^2} \qquad (9)$$

que exprime a ENERGIA TOTAL E da partícula em têrmos da sua ENERGIA DE REPOUSO E_o e do seu MOMENTUM p.

Dividindo ambos os membros da Eq. (9) por c^4 e lembrando que $m = E/c^2$ temos

$$m^2 = m_o^2 + p^2/c^2 \qquad (10)$$

que nos dá a dependência da MASSA de uma partícula com o seu MOMENTUM. Para obter a variação da MASSA diretamente com a velocidade, procedemos assim:

Dividindo a Eq. (9) por E_o^2 temos

$$\frac{E^2}{E_o^2} = 1 + \frac{p^2c^2}{E_o^2}$$

Usando a definição

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

temos

$$\frac{E^2}{E_o^2} = 1 + \frac{m^2v^2c^2}{E_o^2} = 1 + \frac{m^2c^4\ v^2/c^2}{E_o^2}$$

$$= 1 + \frac{E^2v^2}{E_o^2c^2}$$

Portanto

$$\frac{E^2}{E_o^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1$$

[illegible]

$$E = \frac{E_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{11}$$

Como $E = mc^2$ e $E_o = m_o c^2$ temos

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{12}$$

que nos dá a MASSA de uma partícula como função da sua velocidade. A Eq. (12) é uma das equações mais importantes da Física do século XX.

A NOVA EXPRESSÃO DA ENERGIA CINÉTICA

Como foi discutido no § 9 o conceito newtoniano de massa como uma propriedade intrínseca da partícula, tinha como consequência para a energia cinética a expressão $T = \frac{1}{2} mv^2$. Por outro lado, do conceito einsteniano de massa como energia resulta para a energia cinética uma expressão diferente de $\frac{1}{2} mv^2$, como discutido no § 9. A nova expressão da energia cinética pode ser obtida da Eq. (8)

$$(T + E_o)^2 = E_o^2 + p^2c^2 \tag{13}$$

Temos

$$T = \sqrt{E_o^2 + p^2c^2} - E_o$$

$$= E_o \left\{ \sqrt{1 + \frac{p^2c^2}{E_o^2}} - 1 \right\}$$

$$= E_o \left\{ \sqrt{1 + \frac{m^2v^2}{m_o^2c^2}} - 1 \right\}$$

$$= E_o \left\{ \sqrt{1 + \frac{m_o^2v^2}{m_o^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) c^2}} - 1 \right\}$$

$$= E_o \left\{ \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2 - v^2}} - 1 \right\}$$

ou, usando a equação $E_o = m_oc^2$, e manipulando dentro de radical

$$T = m_o \left\{ \sqrt{\frac{c^6}{c^2 - v^2}} - c^2 \right\} \qquad (14)$$

que é a expressão final da energia cinética em função da velocidade da partícula. Embora bastante mais complicada do que a expressão newtoniana $T = \frac{1}{2} mv^2$ a nova forma da energia cinética, dada pela Eq. (14) é de muito mais utilidade na Física e muito mais geral que a expressão newtoniana. Muitas vêzes é conveniente exprimir a energia

cinética T em unidades da massa de repouso $m_o c^2$, isto é, $T/m_o c^2$. Da Eq. (14) temos

$$\frac{T}{m_o c^2} = \sqrt{\frac{c^2}{c^2 - v^2}} - 1$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\frac{c^2 - v^2}{c^2}}} - 1$$

ou seja,

$$\boxed{\frac{T}{m_o c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1} \tag{15}$$

Da Eq. (15), multiplicando por $m_o c^2$ temos

$$T = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_o c^2$$

que da Eq. (12) nos dá

$$T = mc^2 - m_o c^2$$

que face à Eq. (15) nos dá

$$T = E - E_o \tag{16}$$

ou seja, a energia total E é a soma da energia de repouso E_o e da energia devido ao movimento (CINÉTICA) T.

Por outro lado queremos que as relações fundamentais

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{19}$$

e

$$E = mc^2 \tag{20}$$

sejam válidas em qualquer caso (mesmo quando $m_o = 0 = E_o$). Das equações (19) e (20) segue

$$\boxed{\vec{v} = c^2 \frac{\vec{p}}{E}} \tag{21}$$

Portanto, da Eq. (21) que vale em <u>qualquer caso</u> e da Eq. (18) que vale no <u>caso particular</u> de $m_o = 0$, temos, substituindo E = pc da Eq. (18) na Eq. (21)

$$\boxed{v(m_o = 0) = c} \tag{22}$$

ou seja:

"O significado e o valor da constante "c" é a velocidade das partículas de massa de repouso nula".

ou, de outro modo:

"Tôda partícula de massa de repouso nula tem velocidade igual a c".

Resta, pois, saber quais são as partículas de massa de repouso nula, medir sua velocidade para se obter o valor da constante c.

5. A VELOCIDADE DA LUZ

Sem dúvida, não podemos selecionar as partículas de massa de repouso nula por uma medição da massa de repouso de uma série de partículas. Podemos, no entanto, medindo a energia e o momentum, descobrir quais as partículas que satisfazem a Eq. (18), ou seja, devemos investigar quais as partículas cuja energia é proporcional ao seu momentum. Essas partículas serão partículas de massa de repouso nula. Entre as poucas partículas de massa de repouso nula, a mais comum é a luz, pois LEBEDEV (1901) e NICHOLS e HULL (1903), independentemente, mediram a "pressão da radiação", isto é, a pressão, ou fôrça por unidade de área, ou transferência de momentum por unidade de tempo e por unidade de área e concluiram que essa pressão é proporcional à energia da radiação (incidente por unidade de tempo por unidade de área), e que o coeficiente de proporcionalidade é a velocidade da luz (medida por experiências independentes), tudo de acôrdo com a Equação (18). (Na Eq. (18) "p" é o momentum e não pressão).

Quando encaramos a luz como uma coleção de partículas de massa de repouso nula, com momentum e energia ligados pela Eq. (18) damos o nome de FÓTONS a uma dessas partículas. Portanto

$$\boxed{E = pc \quad \text{(para FÓTONS)}} \qquad (23)$$

e

$$c = \text{velocidade da luz} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ m/seg} \qquad (24)$$

6. CÁLCULO APROXIMADO DA VARIAÇÃO DA MASSA

Da identificação dos conceitos de MASSA e ENERGIA resultou que a massa de uma partícula varia com a sua velocidade, de acôrdo com a Eq. (12),

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (12)$$

ao passo que a exigência de que as equações valham para tôdas as partículas, qualquer que seja o valor da sua massa de repouso m_o (inclusive $m_o = 0$) teve como consequência que

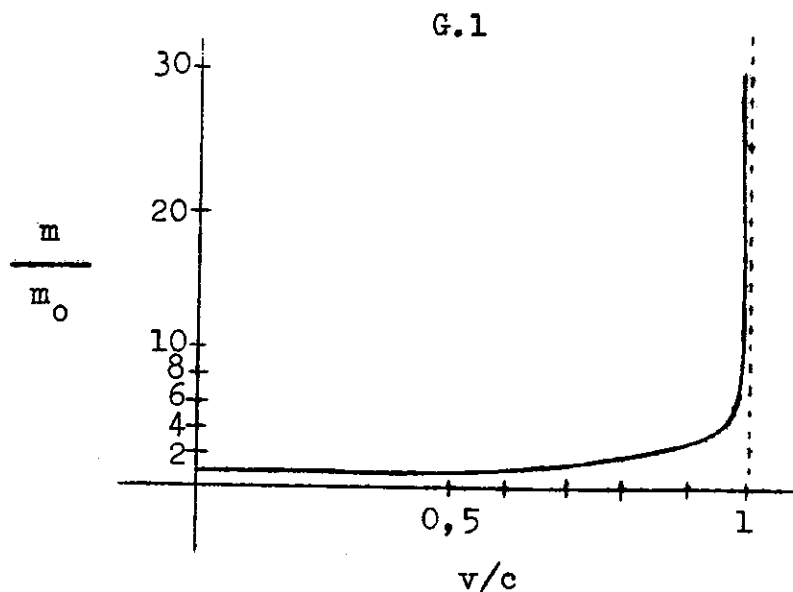
$$m_o \text{ (FÓTONS)} = 0$$

e

$$c = \text{velocidade da luz } (\cong 3 \times 10^8 \text{ m/seg})$$

Da Eq. (12) podemos concluir, portanto, que quando a velocidade de uma partícula se aproxima da velocidade da luz, a sua MASSA (e portanto a sua ENERGIA) cresce indefinidamente. Isso não é evidenciado pela nossa experiência cotidiana (e nem pelos resultados de vários séculos de observação física) em que não percebemos nenhuma variação da massa das partículas. No entanto, não percebemos essas variações devido ao fato de que sendo pequenas (comparadas com a velocidade da luz) as velocidades dessas partículas, as variações de massa resultantes são pequenas demais para serem percebidas nessas situações do cotidiano. O gráfico G.1 mostra a massa em unidades de m_o como função da velocidade da partícula (em unidades

de c) dada pela Eq. (12).

G.1

Da Eq. (12) podemos calcular a variação percentual (dm/m) de massa em função da velocidade. Temos

$$\frac{dm}{m} = \frac{vdv}{c^2 - v^2} = \frac{\frac{1}{2}\, dv^2}{c^2 - v^2}$$

ou seja, para $v \ll c$

$$\frac{m(v) - m(0)}{m(0)} \cong \frac{\frac{1}{2}\,(v^2 - 0)}{c^2 - v^2} \cong \frac{1}{2}\;\frac{v^2}{c^2}$$

Assim podemos organizar uma pequena tabela T.1 que nos mostra a variação percentual de massa, $\dfrac{m(v) - m(0)}{m(0)}$, a baixas velocidades.

T.1

v/c	v	dm/m_o
0,001	300 km/s	$5\cdot 10^{-7}$
0,01	3.000 km/s	$5\cdot 10^{-5}$
0,1	30.000 km/s	$5\cdot 10^{-3}$
0,2	60.000 km/s	$2\cdot 10^{-2}$
0,3	90.000 km/s	$4,5\cdot 10^{-2}$

Por outro lado, a Tabela T.2 nos mostra a velocidade de alguns movimentos de nosso cotidiano juntamente com as variações percentuais de massa correspondentes.

T.2

situação	velocidade	dm/m_o
movimento orbital da Terra em tôrno do Sol	$3\cdot 10^4$ km/h	$3,85\cdot 10^{-10}$
satélite artificial	$1\cdot 10^4$ km/h	$4,28\cdot 10^{-11}$
avião supersônico	$2,5\cdot 10^3$ km/h	$2,68\cdot 10^{-12}$
molécula num gás	$1\cdot 10^3$ km/h	$4,28\cdot 10^{-13}$

Na Tabela 2 vemos que essas variações (no máximo de ordem de 4 partes em 10^{10}) passam completamente desapercebidas frente à sensibilidade dos aparelhos usados nessas situações.

17. VARIAÇÃO DE MASSA NO DOMÍNIO ATÔMICO

Já no domínio dos movimentos intra-atômicos a situação não é a mesma. A Tabela 3 nos mostra a ordem de grandeza da velocidade de um elétron profundo num átomo leve (H) e num átomo pesado (Cu) juntamente com as variações correspondentes de massa.

T.3

átomo	ordem de grandeza da velocidade de um elétron profundo	dm/m_o
H	$2 \cdot 10^8$ cm/s ($6,6 \cdot 10^{-3}$ c)	$2 \cdot 10^{-5}$
Cu	$6 \cdot 10^9$ cm/s (0,2 c)	$2 \cdot 10^{-2}$

Da T.3 vemos que no interior dos átomos (principalmente dos átomos pesados) um elétron atinge velocidades comparáveis com a velocidade da luz, acarretando variações de massa significantes, o que altera profundamente o comportamento dos elétrons nessas situações.

18. VARIAÇÃO DE MASSA NO DOMÍNIO DA ELETRÔNICA

No entanto, não é só no interior dos átomos que os elétrons adquirem altas velocidades. Mesmo submetido à ação de campos elétricos comuns um elétron sofre variação de massa apreciável. Calculemos essa variação.

Quando uma partícula de carga elétrica q e massa m é submetida a uma fôrça $\vec{F}$ (que suporemos constante) a sua velocidade é calculada pela 2ª lei de Newton,

$\vec{F} = m\vec{a}$, da qual resulta, $\vec{a} = \vec{F}/m$ e $d\vec{v} = \vec{a}dt = (q\vec{E}/m)dt$, onde $\vec{E}$ = intensidade do campo elétrico, igual a F/q.

Multiplicando ambos os membros por v, temos $v \cdot dv = \left(\frac{1}{2} dv^2\right) = (q\vec{E}/m) \cdot \vec{v}dt$. Desprezando a variação da massa com a velocidade temos por integração, $v^2 = (2qE/m_o)L$ onde v é a velocidade final no percurso L, tendo a carga partido do repouso. Conhecendo o valor da razão q/m_o (para um elétron essa razão vale $1,76 \cdot 10^{11}$ coulomb/kg) podemos calcular a velocidade adquirida pela carga quando acelerada por uma certa diferença de potencial V existente no percurso L(E = V/L = tantos volts por cm). Substituindo o valor V/L = E, na expressão anterior, temos

$$\boxed{v^2 = 2\ qV/m_o} \qquad (25)$$

Nesse caso a variação percentual de massa dada pela expressão $dm/m_o \cong v^2/2c^2$ fica

$$dm/m_o = qV/m_oc^2 \qquad (26)$$

A Tabela T.4 nos mostra a velocidade final e a variação percentual da massa de um elétron quando acelerado por potenciais comumente encontrado em aparelhos eletrônicos.

T.4

Aparêlho	V	v	$\frac{dm}{m_o} = \frac{eV}{m_o c^2}$
válvula de rádio	100 volt	$6 \cdot 10^6$ m/s	$2 \cdot 10^{-4}$
tubo de televisão	10.000 volt	$6 \cdot 10^7$ m/s	$2 \cdot 10^{-2}$

Da Tabela T.4 vemos que mesmo quando acelerado por potenciais existentes em aparelhos eletrônicos comuns um elétron atinge velocidades comparáveis com a velocidade da luz, e consequentemente, sofre variações de massa apreciáveis. Portantó, menos nesses casos devemos usar as equações completas, por exemplo, Eqs. (12) e (15), sendo incorreto o uso das equações aproximadas.

19. CÁLCULO EXATO DA VELOCIDADE ADQUIRIDA POR UM ELÉTRON

No cálculo anterior concluimos que a velocidade final v de uma partícula de carga elétrica q acelerada por uma diferença de potencial V era dada aproximadamente por $v^2 = 2qV/m_o$. Êsse resultado não é exato, porque tomamos a massa da partícula como uma constante m_o, independente da sua velocidade. No entanto, o cálculo exato dessa velocidade é bastante simples. De fato, pelo princípio da conservação da energia, a energia cinética $(T = E - E_o)$ adquirida pela partícula ao se deslocar sob a ação de uma diferença de potencial V é igual à perda de energia potencial elétrica qV, ou seja, T = qV. É justamente isso que o resultado acima, Eq. (25), $v^2 = 2\ qV/m_o$ significa. De fato, multiplicando por $m_o/2$ concluimos que

$$\frac{1}{2} m_o v^2 = qV \qquad (27)$$

ou seja, "Energia cinética (aproximada adquirida, T = perda de energia potencial, qV".

Para calcular o valor exato da velocidade final, basta usar, em vez de $T = \frac{1}{2} m_o v^2$, a expressão exata para a energia cinética T(v) dada pela Eq. (15) na igualdade T(v) = qV. Temos

$$T = m_o c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right\} = qV$$

ou seja,

$$\frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = qV + m_o c^2$$

que elevada ao quadrado nos dá

$$\frac{m_o^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (m_o c^2 + qV)^2$$

e invertendo temos

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_o^2 c^4}{(m_o c^2 + qV)^2}$$

ou, finalmente

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m_o^2 c^4}{(m_o c^2 + qV)^2} \qquad (28)$$

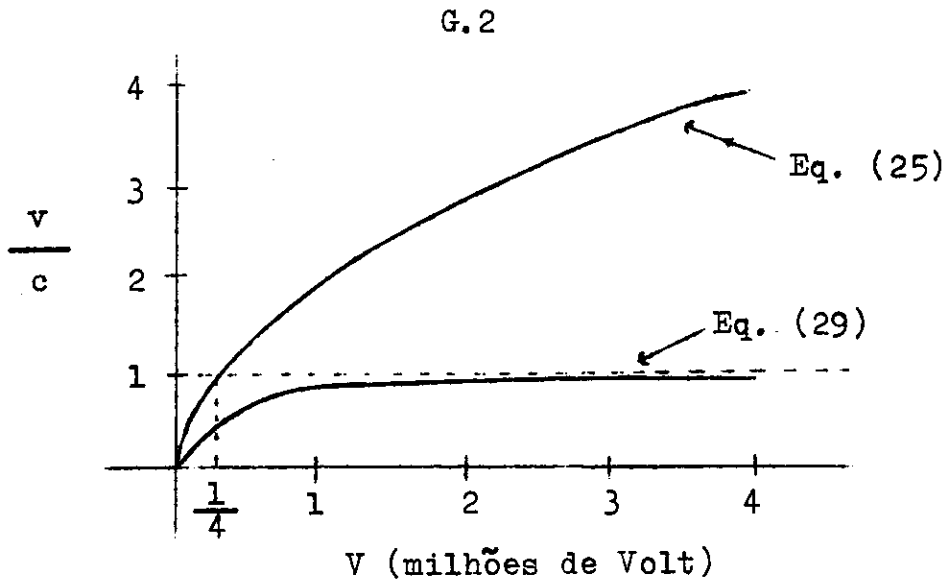
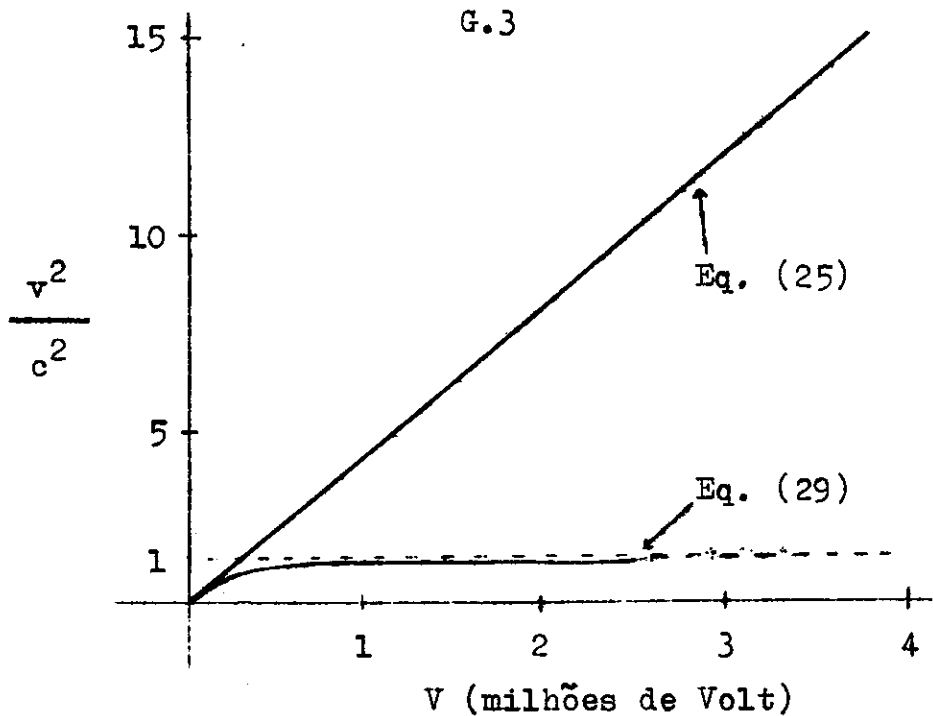
Dividindo o numerador e o denominador do segundo membro por $m_o^2 c^4$ ficamos com uma expressão mais cômoda

$$\boxed{\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{qV}{m_o c^2}\right)^2}} \qquad (29)$$

que nos dá o valor <u>exato</u> da velocidade final v de uma partícula de carga q e massa de repouso m_o quando acelerado por uma diferença de potencial V. Êsse resultado exato deve ser comparado com o resultado aproximado, dado pela Eq. (27)

$$v^2 = \frac{2\,qV}{m_o} \qquad (27)$$

obtido anteriormente, quando desprezamos a variação da massa com a velocidade.

O gráfico G.2 nos mostra, para um elétron submetido à ação de fôrças, a sua velocidade final, calculada pela equação aproximada, Eq. (27) e pela equação exata (29), em função do potencial acelerador, V.

O gráfico G.3 nos mostra os mesmos resultados, porém, para o quadrado da velocidade, v^2/c^2.

O gráfico G.4 nos mostra o quadrado da velocidade adquirida v^2, em unidades de c^2, para potenciais aceleradores fracos.

20. O "ELÉTRON-VOLT" COMO UMA NOVA E CONVENIENTE UNIDADE DE ENERGIA

Da discussão precedente notamos que quando um elétron se desloca sob ação de uma diferença de potencial elétrico V a energia cinética adquirida é igual a eV, onde e é a carga elétrica do elétron. Assim, se um elétron executa um certo movimento sob ação de uma diferença de potencial de, por exemplo, 100 volt a sua velocidade final será dada pela Eq. (29) a partir da qual podemos calcular (em erg, por exemplo) a sua energia cinética exata por meio da Eq. (15). Êsse cálculo nos dará, nas unidades escolhidas, um certo valor, digamos, T_{100}. Se repetirmos o cálculo para um outro movimento sob a ação, digamos, de 200 V, passando pela complexidades das Equações (29) e (15), obteremos outro valor, nas mesmas unidades escolhidas, digamos, T_{200}. Independentemente das unidades escolhidas teremos sempre $T_{200} = 2T_{100}$, $T_{300} = 3T_{100} = 300\ T_1$, ou em geral, $T_V = VT$, ou seja, a energia cinética (expressa em qualquer unidade de energia) adquirida por um elétron que se move sob a ação de uma diferença de potencial igual a "V volts" é igual V vêzes a energia cinética adquirida pelo mesmo elétron se êle se movesse sob a ação de uma diferença de potencial igual a "1 Volt".

Mesmo que o elétron tenha alcançado uma velocidade v sob ação de <u>fôrças não elétricas</u>, ou sob ação de <u>fôrças elétricas complicadas</u> (campo não uniforme) a essa velocidade v corresponderá uma certa energia cinética, dada pela Eq. (15), energia essa que poderia ter sido adquirida por uma aceleração produzida por um campo elétrico correspondente a uma certa diferença de potencial igual a um certo número V de volts. Assim, independentemente do processo pelo qual o elétron adquira energia cinética

podemos dizer que essa energia cinética vale "tantos volts" ou melhor ainda, "tantos elétron-volts". Mesmo outras formas de energia, que não sejam energia cinética podem ser expressas em "elétron volts" (eV). Por exemplo, a energia de repouso de um elétron equivale aproximadamente a 500.000 elétron-volt ou $5 \cdot 10^5$ eV, o que significa dizer que "a energia de repouso, $m_o c^2$, de um elétron, expressa por exemplo em erg, é igual à energia cinética que êste elétron, partindo do repouso, teria adquirido se tivesse sido acelerado por $5 \cdot 10^5$ volt".

Além disso, qualquer forma de energia de qualquer partícula pode ser expressa em eV, o resultado numérico X sempre significando "a energia cinética que um elétron, partindo do repouso, teria adquirido se tivesse sido acelerado por X volts".

Para evitar números muito grandes, quando conveniente, podemos tomar 10^6 eV como unidade de energia, que será denotada por MeV (milhão de elétron-volts).

21. PROBLEMAS

Calcule em eV as seguintes energias:

1) a energia de repouso de um elétron:
   ($m_{oe} = 9,1 \cdot 10^{-28}$ gramas)

2) a energia de repouso de um próton:
   ($m_{op} = 1,67 \cdot 10^{-24}$ g)

3) a energia de repouso de uma partícula α:
   ($m_o = 6,8 \cdot 10^{-24}$ g)

4) a energia de repouso de um núcleo de Urânio 238:

(m_{oU} = $3,94 \cdot 10^{-22}$ g)

5) a energia de repouso de uma partícula de massa de repouso igual a 1 grama:

(m_{o1} = 1 g)

6) a energia de repouso da Terra:

($m_{o,T}$ = $6 \cdot 10^{27}$ g)

7) a energia cinética adquirida por um próton acelerado por uma diferença de potencial de 200.000 V;

8) a energia cinética de uma partícula α (núcleo de Hélio duplamente ionizado) acelerada por uma diferença de potencial de $6 \cdot 10^{6}$ V.

22. O LIMITE CLÁSSICO

Na discussão anterior fica claro que para velocidades baixas ($v \ll c$) a variação da massa de uma partícula com a sua velocidade é inapreciável e que todos os resultados aproximados da Mecânica Clássica (decorrentes de $m = m_o$ = constante) estão contidos nas equações exatas em que se leva em conta a variação da massa com a velocidade, que no fundo significa a equivalência entre massa e energia. De fato, as equações exatas são:

$$E = \frac{E_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (11) \qquad\qquad m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (12)$$

$$T = m_o c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right\} \qquad (15)$$

Expandindo $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ em série de potencias de $\frac{v^2}{c^2}$, usando a expressão binomial

$$(1 + x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} x^3 + \ldots$$

que, para $p = -\frac{1}{2}$ nos dá

$$(1 + x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2} x^2 + \ldots$$

que no caso de $x = -v^2/c^2$ fica

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \ldots ,$$

que substituindo nas Eqs. (15), (12) e (11) acima nos dá

$$T = m_o c^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \ldots \right\} \qquad (30)$$

$$m = m_o + \frac{1}{2} m_o \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} m_o \frac{v^4}{c^4} + \ldots \qquad (31)$$

$$E = E_o + \frac{1}{2} E_o \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} E_o \frac{v^4}{c^4} + \ldots \qquad (32)$$

Como $E_o = m_oc^2$ podemos escrever, desprezando têrmos de ordem igual ou superior a v^2/c^2

$$T = \frac{1}{2} m_o v^2 + \ldots \tag{33}$$

$$m = m_o \tag{34}$$

$$E = m_oc^2 + \frac{1}{2} m_o v^2 + \ldots = m_oc^2 + T \tag{35}$$

que são justamente os valores clássicos da massa e da energia cinética. A Eq. (35) expressa a energia total como a energia cinética clássica $(1/2)m_ov^2$ mais a energia de repouso m_oc^2 porém êsse têrmo adicional m_oc^2 não afeta os cálculos clássicos, por ser apenas uma constante (embora muito grande).

23. TEORIA DA RELATIVIDADE E MECÂNICA CLÁSSICA

O conjunto das idéias e as equações resultantes (por exemplo, Eqs. (9), (10), (11), (12), (15), etc, do axioma da equivalência entre massa e energia (Eq. 15) se chama, por razões históricas, TEORIA DA RELATIVIDADE e foram obtidos pela primeira vez por um caminho sistemático por EINSTEIN em 1905. Por outro lado, o conjunto das idéias e equações resultantes do axioma da invariabilidade de massa ($m = m_o$ ou $dm = 0$) se chama MECÂNICA CLÁSSICA, e foram sistematizados por NEWTON em 1687. Os resultados da Mecânica Clássica estão contidos na Teoria da Relatividade e a partir dela podem ser obtidos tomando o limite $v \longrightarrow 0$ $(v \ll c)$ e desprezando a energia de repouso, m_oc^2, por ser um têrmo constante e invariável.

4. PRINCÍPIO DE RELATIVIDADE

Na formulação dos conceitos e das leis da Física devemos levar em conta a necessidade de que as leis básicas da Física não se apliquem sòmente a certos referenciais especiais:

> Se uma determinada lei da Física vale num referencial R essa mesma lei deve valer em qualquer referencial R' que se mova em relação a R com uma velocidade constante $u^R_{R'}$, (medida por R).

Por exemplo: 1) se a energia de um sistema medida com relação a um referencial R, durante um determinado processo se conserva, então êsse mesmo processo visto por um observador situado num referencial R' que se move com velocidade $v^R_{R'}$, deve ser descrito em R' de tal forma que a energia medida com relação a R' se conserve. Uma maneira diferente de encarar o PRINCÍPIO DE RELATIVIDADE, é supor que mantendo fixo o observador em R e transferindo-se o equipamento com o qual se realiza o processo para um outro referencial R' que se move em relação a R com velocidade $u^R_{R'}$, então no mesmo processo em R' a energia também se conserva. Os dois modos de encarar o PRINCÍPIO DE RELATIVIDADE são equivalentes, pois o importante não é nenhum movimento absoluto, porém, o movimento relativo entre observador e equipamento.

Como outro exemplo, podemos dizer que se a massa m de um objeto para um observador R varia como

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$ onde v é a velocidade do objeto em relação

ao observador, então para um observador R' que se desloca em relação ao 1º observador R com uma velocidade u, e portanto em relação ao qual (R') o objeto se desloca com uma velocidade v' ≠ v, a massa do objeto deve variar como

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}.$$

Em particular, para um observador R^o que se desloca junto com o objeto (e em relação ao qual (R^o) o objeto está portanto em repouso), a massa do objeto (agora em repouso) não varia, isto é, varia com $\frac{1}{\sqrt{1 - 0}}$.

A afirmação acima sublinhada é denominada PRINCÍPIO DE RELATIVIDADE RESTRITA (restrito a movimentos relativos uniformes). Na verdade êsse princípio pode ser estendido ou generalizado de tal forma que as leis da Física sejam as mesmas para quaisquer dois observadores em movimento relativo, mesmo em movimento não uniforme. No entanto, a generalização do Princípio de Relatividade Restrita envolve métodos matemáticos fora do nosso alcance.

25. MUDANÇA DE REFERENCIAL - TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

Já que energia, momentum, massa, velocidade, etc, são os nossos conceitos fundamentais, precisamos ter respostas para perguntas do seguinte tipo:

"Se a energia de um objeto é E em relação a um determinado observador (isto é, em relação a um referencial R) qual será a energia E' dêsse mesmo objeto em relação a um outro observador que se move uniformemente em relação ao primeiro com velocidade u? (isto é, em relação a um referencial R' que se move com velocidade $u = u_{R'}^{R}$, em relação a R)".

Devemos saber a resposta a esta pergunta para: energia, momentum, massa, velocidade e qualquer outro conceito que venhamos a introduzir e utilizar. Para a massa já temos uma resposta parcial, pois sabemos que se a massa de um objeto num referencial R^o em que ela está em repouso é m_o, então em relação a um referencial R que se move em relação a R^o com velocidade v (e que portanto em relação ao qual o objeto se move com uma velocidade -v) a massa do mesmo objeto será $m_o / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, Eq.(12).

Embora êsse problema possa ser tratado em tôda sua generalidade, vamos introduzir na nossa discussão, duas restrições:

1ª) A partícula em questão se desloca ao longo de uma reta. Essa reta será tomada como o eixo X do referencial R;

2ª) A velocidade $u_{R'}^{(R)}$ do referencial R' em relação a R é dirigida segundo o eixo X. O eixo X' de R' será tomado também na direção X.

Dessa forma, podemos omitir da discussão as componentes da velocidade e do momentum segundo os eixos Y e Z, o que simplifica a discussão, embora introduza uma pequena limitação nos resultados. No que se segue, devemos portanto entender as palavras velocidade e momentum como componentes X.

Usando um superscrito R, R', etc, para indicar o referencial em relação ao qual a grandeza é medida, e abreviando $E^{(R')}$ por E', $E^{(R)}$ por E, $u_{R'}^{R} = u_{R'} = u$, etc, podemos escrever para as fórmulas que nos dão as transformações das grandezas ENERGIA E e MOMENTUM p conhecidos em R, para um outro referencial R' que se move com uma velocidade $u_{R'}^{R} = u$ em relação a R:

$$p' = ap + bE \qquad \text{(TL1)}$$

$$E' = AE + Bp \qquad \text{(TL2)}$$

onde TL1, por exemplo, é uma abreviação de

$$p^{(R')} = a(u)p^{(R)} + b(u)E^{(R)}$$

Em TL1 e TL2 a, b, A, B são constantes, isto é, embora dependam da velocidade relativa u dos dois referenciais, elas não dependem da velocidade v do objeto, isto é, não dependem nem de p nem de E. As transformações contidas em TL1 e TL2 são portanto lineares (isto é, se por exemplo p e E dobram, E' e p' ficam também dobrados).

Podemos usar vários argumentos para deduzir os valores da constante a, b, A e B em têrmos de u. Vamos fazê-lo utilizando:

1º) O Princípio da Relatividade Restrita;

2º) O Princípio da Equivalência entre massa e energia, Eq. (5), $E = mc^2$; e

3º) O resultado já obtido da RFD, isto é, Eq. (11)

$$E(v) = \frac{E_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Para isso consideraremos, um de cada vez, dois objetos animados de movimentos particularmente simples e deduziremos o valor de a, b, A e B. Como os valores de a, b, A e B não dependem da velocidade v do objeto, mas só da velocidade u relativa dos referenciais entre si,

os valores assim determinados valem para qualquer objeto com qualquer velocidade v (em relação a R, e v' em relação a R'), isto é, para quaisquer valores de p e de E, com as duas restrições, apenas, introduzidas à pg. 54.

1) Consideremos inicialmente o caso particular de uma partícula em repouso em relação a R. Temos portanto:

$$p = 0 \qquad e \qquad E = E_o = m_o c^2$$

Já em relação ao referencial R' essa partícula tem uma velocidade $v_R^{R'} = -v_{R'}^R = -u$ e seu momentum e energia serão:

$$p' = p(-u) = m(-u)(-u) = -m(u)u = -\frac{m_o u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$E' = E(-u) = \frac{E_o}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Substituindo êsses valores de p, p', E e E' nos TL1 e TL2 temos:

$$\text{TL1:} \quad \frac{-m_o u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = a \cdot 0 + bE_o = bm_o c^2$$

e portanto,

$$b = \frac{-u/c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{36}$$

$$\text{TL2:} \quad \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = Am_o c^2 + 0$$

e portanto,

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{37}$$

2) Para determinar a e B consideremos outro caso particular de partícula ainda em repouso, agora em relação a R'. Temos portanto,

$$p' = 0 \qquad E' = m_o c^2$$

($E' = m_o c^2$ porque pelo PRINCÍPIO DE RELATIVIDADE, a massa de repouso de um objeto não depende do estado de movimento do observador, isto é, se a massa de uma partícula em repouso em relação a R é m_o a massa dessa mesma partícula quando em repouso em relação ao outro referencial R' terá o mesmo valor m_o. O valor da massa de um objeto só depende do movimento relativo entre o observador e o objeto). Em relação ao referencial R, êsse objeto agora se move com velocidade $v^R_{R'} = u$ e portanto

$$p = mu = \frac{m_o u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$E = mc^2 = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Substituindo êsses quatro valores na TL1 e TL2 temos:

$$\text{TL1:} \quad 0 = a \frac{m_o u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + b \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

e portanto,

$$a = - \frac{bc^2}{u}$$

ou, usando o valor de b já obtido na Eq. (36),

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{38}$$

$$\text{TL2:} \quad m_o c^2 = a \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + B \frac{m_o u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

e portanto, usando a Eq. (38) e dividindo por $m_o c^2$

$$1 = \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} + B \frac{u/c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} ,$$

$$B \frac{u/c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{-u^2/c^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

donde concluimos que

$$B = \frac{-u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{39}$$

Determinados assim os valores de a, b, A e B pelas Equações (36) a (39), temos para as Equações de transformação, TL1 e TL2

$$\text{TL1} \quad p' = \gamma\left(p - \frac{uE}{c^2}\right)$$

$$\text{TL2} \quad E' = \gamma(E - up)$$

onde

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Essas fórmulas de transformação de um referencial para outro valem para qualquer movimento (desde que retilíneo e ao longo de u) de qualquer objeto, e por isso constituirão o centro das nossas manipulações. Equações de transformações equivalentes a TL1 e TL2 acima foram obtidas antes de EINSTEIN (1905) por LORENTZ em 1903 e por isso são denominadas TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ.

OBSERVAÇÃO: Para descongestionar as Equações é comum tomar c como unidade de velocidade, ou seja, c = 1, passando u/c a ser escrito como u. Tôdas as equações ficam muito mais simples. As TL1 e TL2, por exemplo, passariam a ser escritas:

$$\text{TL1} \quad p' = \gamma(p - uE)$$

$$\text{TL2} \quad E' = \gamma(E - up)$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$$

Por outro lado a equivalência entre massa e energia, Equação (5), seria escrita

$$E = m$$

26. COMPOSIÇÃO DAS VELOCIDADES

Se a velocidade de uma partícula em relação a um referencial R vale $v^R = v$, qual será a sua velocidade $v^{R'} = v'$ em relação a um referencial R', que se move em relação ao primeiro R com uma velocidade $v^R_{R'} = u$? A resposta dessa pergunta vem de

$$\text{TL1} \quad p' = \gamma_u \left(p - \frac{u}{c^2} E \right)$$

$$\text{TL2} \quad E' = \gamma_u (E - up)$$

Usando a Eq. (21), $v' = c^2 p'/E'$ e dividindo TL1 por TL2 temos

$$v' = c^2 \, \frac{p - (u/c^2)E}{E - up}$$

Dividindo o denominador e numerador do segundo membro por E temos, face à Eq. (21)

$$v' = c^2 \, \frac{v/c^2 - u/c^2}{1 - uv/c^2}$$

e portanto

$$\boxed{v' = \frac{v - u}{1 - uv/c^2}} \qquad (40)$$

11. INVARIANTES

Diz-se que as grandezas $\vec{F}$ e G se transformam covariantemente ou são covariantes com $\vec{p}$ e E se essas grandezas $\vec{F}$ e G se transformem segundo TL1 e TL2, isto é,

$$F' = \gamma\left(F - \frac{u}{c^2}\,G\right) \quad \text{—— semelhante a } p'$$

$$G' = \gamma\,(G - uF) \quad \text{—— semelhante a } E'$$

que significa que os valores de F e G dependem do estado de movimento ou do estado do movimento do observador, ou melhor ainda, do estado de movimento em relação ao observador. No entanto, existem combinações de F e G (e de F' e G') cujo valor não dependem do observador. Essas combinações são denominadas INVARIANTES, isto é, o valor de cada uma dessas combinações é o mesmo para todos os observadores, isto é, não depende do estado de movimento da partícula em relação ao observador. Por exemplo,

$$F'^2 = \gamma^2\left(F^2 + \frac{u^2}{c^4}\,G^2 - \frac{2u}{c^2}\,FG\right)$$

e

$$G'^2 = \gamma^2\,(G^2 + u^2F^2 - 2uFG)$$

e portanto

$$G'^2 - c^2F'^2 = \gamma^2\left(G^2 - \frac{u^2}{c^2}\,G^2 + u^2F^2 - c^2F^2\right)$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}}\left[G^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) - c^2F^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\right]$$

$$= G^2 - c^2F^2$$

Portanto,

$$\boxed{G'^2 - c^2F'^2 = G^2 - c^2F^2 = \text{INVARIANTE}} \qquad (41)$$

Em particular,

$$E'^2 - c^2p'^2 = E^2 - c^2p^2 = \text{INVARIANTE}$$

O valor dêsse invariante já conhecemos, e pode ser obtido da Eq. (9), $E^2 = E_o^2 + p^2c^2$, que nos dá $E^2 - c^2p^2 = E_o^2$, ou seja, o valor do INVARIANTE particular $E^2 - p^2c^2$ é o quadrado da energia de repouso, que já sabemos ser um INVARIANTE, pois, pela equivalência entre massa e energia, a energia de repouso é simplesmente a massa de repouso.

Existem, no entanto, outros invariantes menos óbvios que a massa de repouso. Os invariantes num dado movimento ("movimento não no sentido restrito de deslocamento no espaço, mas no sentido geral de "processo", "acontecimento", "reação", "transformação" e mesmo um "simples deslocamento") são de grande importância nas formulações das leis da Física. Certamente nem tôdas as leis da Física envolvem sòmente invariantes. Além de alguns elementos invariantes (massa de repouso, velocidade da luz, carga dos elétrons, etc), uma lei da Física em geral envolve elementos não invariantes (massa, energia, momentum, velocidade, etc). No entanto, devemos preferir formulações das leis da Física que envolvam o maior número possível de elementos invariantes e o menor número possível de elementos não invariantes. Daí a utilidade dos invariantes e o nosso interêsse em descobrí-los. A discussão seguinte nos conduzirá à descoberta de mais um invariante de grande importância

8. O INVARIANTE FUNDAMENTAL

O conceito de momentum é definido como produto da massa pela velocidade. Essa definição envolve três conceitos não invariantes (como já vimos), 1) massa, 2) velocidade e 3) momentum. Em relação a referenciais R e R' diferentes, cada uma dessas três grandezas terá valores diferentes. Usando êsses três elementos não invariantes, queremos descobrir combinações invariantes. Quanto ao momentum não há possibilidade de torná-lo invariante (o invariante, já vimos, é $E^2 - p^2c^2$). No entanto, podemos procurar uma nova definição de momentum que, em vez de envolver dois elementos não invariantes, m e v, envolva mais um invariante no lugar de m *ou* de v. (Òbviamente seria infrutífero buscar *dois* invariantes para substituir m *e* v). A solução é fácil porque a presença de m na definição de p = mv, sugere a introdução de m_o, isto é, em vez de definir p = mv podemos definir $p = m_o v^*$, onde v^* òbviamente não é mais a velocidade comum, $\frac{dx}{dt}$, da partícula, em relação a um referencial R, $\frac{dx^{(R)}}{dt^{(R)}}$, obtida da maneira comum pelo quociente do deslocamento $dx^{(R)}$ medido em relação ao referencial R, pelo intervalo de tempo $dt^{(R)}$ medido também por relógios *fixos* no referencial R.

Na definição usual $p^{(R)} = m^{(R)} \frac{dx^{(R)}}{dt^{(R)}}$, sòmente $dt^{(R)}$ poderia ser (mas não é) um invariante, já que òbviamente, p, m e dx dependem do referencial. Se escolhermos uma nova definição $p^{(R)} = m_o v^{(R)*}$ ou ESCOLHEMOS dx^* invariante ou ESCOLHEMOS dt^* invariante.

PRIMEIRA ALTERNATIVA: Se mantivéssemos dt dependendo do referencial e escolhêssemos dx^* como invariante, ficaría-

mos na seguinte situação (escrevendo provisòriamente dx_o no lugar de dx^* para salientar o seu caráter de invariante, e dt no lugar de dt^*).

$$p^{(R)} = m_o \frac{dx_o}{dt^{(R)}}$$

onde:

1) $p^{(R)}$, o momentum, depende do referencial, de acôrdo com TL1;

2) m_o, a massa de repouso, é um INVARIANTE;

3) dx_o, um deslocamento INVARIANTE no espaço absoluto que por ESCOLHA NOSSA não depende do referencial, e

4) $dt^{(R)}$, o tempo gasto em percorrer dx_o, que depende do referencial (senão nada no segundo dependeria do referencial, o que acarretaria ser o primeiro têrmo também um invariante, o que não é).

<u>SEGUNDA ALTERNATIVA</u>: Podemos manter o deslocamento dx dependendo do referencial e ao mesmo tempo escolher dt^* como invariante, e nesse caso escrevermos dt_o em vez de dt^* e dx em vez de dx^*, ficaremos com

$$p^{(R)} = m_o \frac{dx^{(R)}}{dt_o}$$

onde,

1) $p^{(R)}$, o momentum, depende do referencial, de acôrdo com TL1;

2) m_o, a massa de repouso, é um INVARIANTE;

3) $dx^{(R)}$, o deslocamento medido em relação ao referencial R e que portanto òbviamente não é invariante.

4) dt_o, um intervalo de tempo, por ESCOLHA, INVARIANTE, gasto em percorrer dx.

A segunda alternativa é a preferida, porque a primeira gera uma série de inconveniências que não são compensadas pela introdução do novo invariante dx_o.

Se escolhermos a segunda alternativa, introduzindo portanto um intervalo de tempo dt_o invariante resulta para êsse invariante dt_o os seguintes significado e valor.

De

$$p^{(R)} = m^{(R)} \frac{dx^{(R)}}{dt^{(R)}} ,$$

a definição comum de momentum (que será escrita sòmente de uma outra forma, sem contudo alterar o valor do momentum $p^{(R)}$) e da nova forma de escrever a mesma coisa,

$$p^{(R)} = m_o \frac{dx^{(R)}}{dt_o} ,$$

podemos concluir que

$$m^{(R)} \frac{dx^{(R)}}{dt^{(R)}} = m_o \frac{dx^{(R)}}{dt_o}$$

ou seja, que

$$dt_o = dt^{(R)} \frac{m_o}{m^{(R)}}$$

Como já vimos a massa $m^{(R)}$ de uma partícula de massa de repouso m_o e que se desloca em relação a um referencial R com uma velocidade v vale $m^{(R)} = m_o \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Portanto temos

$$dt_o = dt^{(R)} \sqrt{1 - v^{(R)^2}/c^2} \qquad (42)$$

O significado de dt pode ser compreendido elevando a expressão acima ao quadrado:

$$dt_o^{\,2} = dt^{(R)^2} - \frac{v^{(R)^2}}{c^2}\, dt^{(R)^2}$$

Lembrando-se que $dx^{(R)} = v^{(R)} dt^{(R)}$ temos

$$dt_o^{\,2} = dt^{(R)^2} - \frac{1}{c^2}\, dx^{(R)^2} \qquad (43)$$

ou seja,

"Quando uma partícula qualquer se move arbitràriamente percorrendo num intervalo de tempo dt um espaço dx, o valor de $dt^2 - dx^2/c^2$ (ou de $dx^2 - c^2 dt^2$) é um INVARIANTE, isto é, não depende do referencial". Êsse invariante $dt_o^{\,2}$ se chama o INVARIANTE FUNDAMENTAL.

29. O TEMPO PRÓPRIO

Para compreender o significado de dt_o basta nos colocarmos num referencial (O) relação do qual a partícula se encontra em repouso (isto é, $dx^{(O)} = 0$). A Eq. (43) nesse caso nos dá

$$dt_o = dt^{(O)}$$

ou seja,

30. UM EXEMPLO DE DILATAÇÃO DO TEMPO

Um exemplo de desintegração em vôo que demonstra claramente a dilatação do tempo é o seguinte.

Várias experiências realizadas no laboratório mostram que mésons μ produzidos no laboratório a baixa velocidade (desprezível) se desintegram (estatìsticamente) depois de aproximadamente $2 \cdot 10^{-6}$ seg, a chamada meia vida. Isso significa que dado um certo número N de mésons, depois de $2 \cdot 10^{-6}$ seg só teremos N/2 mésons, tendo os outros N/2 se desintegrado.

Ora, nos chamados raios cósmicos, observamos na superfície da Terra, mésons μ provenientes de cima com velocidades pràticamente iguais à da luz, e que necessàriamente foram produzidos na atmosfera e, portanto, no máximo a uma altura de uns 100 km pela colisão de um raio cósmico com um átomo de gás da atmosfera. Sondagens com balões mostram que acima dessa altitude, onde pràticamente não existe atmosfera, não se observam mésons μ. Ainda mais, essas sondagens nos mostram que dos mésons produzidos, aproximadamente 10% atinge a superfície da Terra antes de se desintegrar.

Ora, para percorrer 100 km se deslocando com a velocidade da luz, êsses mésons levam para chegar à superfície da Terra $100/300.000 \cong 3 \cdot 10^{-4}$ seg, ou seja, um tempo aproximadamente igual a 150 meia-vidas. Nesse tempo, grande parte dos N mésons originalmente produzidos na atmosfera teria se desintegrado antes de alcançar a superfície da Terra. Calculemos que fração de N teria sobrevivido e conseguido chegar aquí. Depois de uma meia-vida teríamos N/2 sobreviventes. Depois de duas meia-vidas N/4. Depois de três N/8. Enfim, depois de n meia-

vidas teríamos $\frac{N}{2^n}$ sobreviventes. Portanto, depois de N = 150 meia-vidas teríamos $(2^{-150} \cong 10^{-45})10^{-45}$ N mésons sobreviventes que atingiriam a superfície da Terra ao nível do mar. No entanto, constatamos que a fração sobrevivente que atinge de fato a superfície da Terrá é muito maior, da ordem de 10%, ou seja, 10^{-1} N. Concluímos, pois, que em relação a um referencial ligado à Terra (com relação ao qual os mésons são contados) em vez de haver decorrido um tempo de cêrca de 150 meia-vidas (isto é, $3 \cdot 10^{-4}$ seg) durante o percurso dos mésons através da atmosfera, decorreu um intervalo de tempo sòmente da ordem de 3 meia-vidas (isto é, $6 \cdot 10^{-6}$ seg). A dilatação do tempo é pois da ordem de um fator 50. Perguntamos, pois: "Qual é a velocidade dos mésons para produzir uma dilatação de tempo igual a 50"? Pela Eq. (44) temos

$$50 = \frac{dt}{dt_o} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

que elevada ao quadrado e invertida nos dá:

$1 - v^2/c^2 = 1/2.500 = 4 \cdot 10^{-4}$, ou seja, $v^2/c^2 = 1 - 4 \cdot 10^{-4}$

$v/c = 1 - 2 \cdot 10^{-4}$, isto é, $v/c = 0.9998$, o que significa que a velocidade dos mesmos é pràticamente igual à da luz.

1. A ENERGIA E O TEMPO PRÓPRIO

Com a introdução do invariante fundamental, e do tempo próprio podemos escrever também a energia $E = mc^2$ em têrmos do tempo próprio. Basta escrever

$$E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{e lembrar que} \quad \frac{dt}{dt_o} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

que ficamos com a expressão

$$\boxed{E = m_o c^2 \frac{dt}{dt_o}}$$

que é bastante parecida com a nova expressão do momentum

$$\boxed{p = m_o \frac{dx}{dt_o}}$$

Vamos redescobrir um resultado já obtido, elevando ao quadrado as duas expressões acima e manipulando. Temos

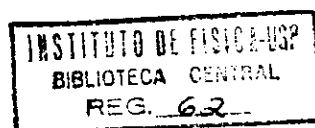
$$E^2 - p^2c^2 = m_o{}^2 c^4 \left(\frac{dt^2}{dt_o{}^2} - \frac{dx^2}{c^2 dt_o{}^2} \right)$$

$$= m_o{}^2 c^4 \, \frac{dt^2 - dx^2/c^2}{dt_o{}^2}$$

Pelo valor do tempo próprio dt_o^2 dado pela Eq. (43) ou pe lo valor do invariante fundamental concluimos que a fração do segundo membro é igual à unidade e que portanto

$$E^2 - p^2c^2 = m_o^2c^4$$

verificando assim, aquilo que já sabíamos.

C E N A

BD-008

INTRODUÇÃO À MECÂNICA RELATIVÍSTICA
(continuação)

Newton Bernardes

26 de julho de 1 972

BOLETIM DIDÁTICO

CENTRO DE ENERGIA NA AGRICULTURA

USP - CNEN

ESCOLA SUPERIOR DE AGRICULTURA "LUIZ DE QUEIROZ"

PIRACICABA-SP

BRASIL

II - SISTEMAS DE PARTÍCULAS

32. A ESTRUTURA DOS SISTEMAS

Todo corpo, exceto as partículas elementares, é composto de um maior ou menor número de partes, ou partículas. Por exemplo: uma porção de gás hidrogênio sob a forma isotópica de deutério é composto de um grande número de moléculas (diatômicas) de hidrogênio (deutério). Cada uma dessas moléculas é por sua vez composta de dois átomos de hidrogênio (deutério). Cada átomo de hidrogênio (deutério) é composto de um núcleo (com uma carga elétrica unitária positiva) e de um elétron (com carga elétrica unitária negativa). O elétron sendo uma partícula elementar não tem partes, ao passo que o núcleo de deutério é composto de um próton e de um neutron. Da mesma forma que o elétron, também o próton e o neutron são partículas elementares e assim sendo não têm partes. Dessa forma, se a porção de hidrogênio contém N moléculas, podemos concluir que ela é constituída de 2 N prótons, 2 N neutrons e 2 N elétrons. A afirmação inversa, porém, nem sempre é verdadeira, isto é, 2 N prótons, 2 N neutrons e 2 N elétrons nem sempre formam uma porção de hidrogênio pesado (deutério). É possível que arranjados sob forma diversa êsses mesmos átomos venham a constituir um outro corpo (substância) com propriedades macroscópicas totalmente diferentes. Por exemplo, êsses mesmos 2 N prótons, 2 N neutrons e 2 N elétrons podem ser encontrados agrupados em N átomos (não em 2 N) cada um contendo, portanto, um núcleo com 2 prótons e 2 neutrons e dois elétrons fora do núcleo de cada átomo, que, portanto, viria a ser um átomo de hélio. Essa coleção de partículas elementares antes constituindo uma porção de hidrogênio pesado, cons-

tituiria agora uma porção de gás hélio (isótopo 4). É, portanto, válida a cogitação de um processo que transforme hélio (isótopo 4) em deutério (isótopo 2 do hidrogênio).

Também podemos considerar corpos macroscópicos compostos de partes também macroscópicas, sem penetrar no detalhe da constituição dessas partes, que portanto seriam as "partes elementares" do corpo em questão. Por exemplo, uma porção de um certo tipo de lama pode ser constituída de uma determinada quantidade de água e de uma determinada quantidade de um certo tipo de argila.

Como outro exemplo podemos considerar que um certo pêndulo (sistema) é composto, por exemplo de 2 partes: um determinado fio de aço e uma determinada esfera de chumbo. No entanto êsse mesmo aço e chumbo, agrupados de outra forma poderiam vir a constituir um outro corpo (sistema), por exemplo, uma dúzia de anzóis e chumbadas para pescar.

No momento estamos interessados em discutir os movimentos (e portanto tôdas as propriedades) de um corpo, a partir dos movimentos de suas partes. Os exemplos acima mostram que para especificar o sistema precisamos especificar as suas partes componentes juntamente com certos detalhes acêrca da maneira como essas partes estão agrupadas.

Para certos fins, podem ser supérfluos certos detalhes da composição das partes de um sistema, que poderia, então, ser especificado por um pequeno número de partes. No caso do pêndulo, se estamos interessados sòmente nas suas oscilações no vácuo sob a ação da gravidade basta especificar o comprimento do fio (se inextensível), sendo desnecessário especificar qualquer detalhe acêrca da esfera de chumbo, até mesmo se ela é de chumbo ou não. É bem verdade que, olhado de uma maneira mais fundamental, para estudarmos as oscilações de um pêndulo

simples precisaríamos conhecer o sistema com mais detalhe, incluindo, por exemplo, como parte do sistema o planeta que produz a gravitação.

A seguir estudamos as propriedades fundamentais de um sistema de partículas (ou partes) a partir das propriedades dessas partes. Inicialmente é necessário definir os atributos do sistema, para eliminar ambiguidades ou incertezas nos conceitos. Por exemplo, não podemos falar com segurança que a velocidade de um certo tijolo é tantos metros por segundo, porque partes diferentes do tijolo podem ter velocidades diferentes (por exemplo, porque êle está girando). Colocaremos algumas definições dos conceitos fundamentais (energia, momentum, massa, massa de repouso, centro de momentum) e a partir delas poderemos tirar algumas conclusões baseadas nas propriedades das partes elementares do sistema, cujas propriedades devem já ser conhecidas.

Até aquí estudamos sòmente as propriedades de corpos puntiformes, que chamamos de partículas. Essa restrição foi necessária porque do início, e repetidamente, usamos o conceito de velocidade que só é bem definido para um corpo de tamanho desprezível face à precisão dos instrumentos de medida. Assim sendo, no que segue, as partes elementares do sistema serão necessàriamente "partículas". Vamos conseguir ampliar os quatro conceitos, energia, momentum, massa e massa de repouso, para incluir o caso de um corpo qualquer. Uma vez que tenhamos alcançado êsse objetivo, podemos recuar e tratar sistemas compostos de partes extensas (isto é, não partículas) já que a essa altura as propriedades dessas partes extensas estarão bem compreendidas dentro de um esquema que não envolve mais o conceito de velocidade. Por isso, no desenvolvimento que segue não seria necessário, já de início, con

siderar as partes do sistema como puntiformes. No entanto, vamos fazê-lo para maior clareza no raciocínio. Uma vez eliminado, no fim, o conceito de velocidade do objeto (sistema) podemos usar os resultados iminentes para abordar sistemas cujas partes elementares podem ser extensas.

33. SISTEMAS IDEAIS E SISTEMAS REAIS

As partes de um sistema podem ou não exercer influência sôbre as outras partes, i.e., o movimento de uma das partes pode ou não ser alterado pela presença das outras partes. Se èsse movimento não é influenciado pela presença mútua significa que êsses movimentos são entre si independentes, exceto quando há contacto entre as partes. As partes que formam um sistema dêsse tipo se chamam INDEPENDENTES ou LIVRES, e o sistema formado por partes ou partículas independentes se chama um SISTEMA IDEAL. Na realidade não existe nenhum sistema ideal, i.e., um sistema formado de partes independentes. No entanto, o estudo dos sistemas ideais além de fornecer um esquema teórico para o estudo de sistemas reais, serve, muitas vêzes, como um modêlo aproximado das propriedades de um sistema real. Por exemplo, as propriedades dos chamados gases nobres, ou gases inertes, a saber: He, Ne, A, Kr, Xe, Ra a temperaturas bem acima dos seus respectivos pontos de ebulição podem ser descritas por um modêlo de um gás IDEAL, em que os ÁTOMOS, exceto pelas colisões mútuas, não interagem uns com os outros. Por outro lado, as propriedades do gás hidrogênio não podem ser descritas por um modêlo IDEAL de um gás de ÁTOMOS INDEPENDENTES, pois um par de átomos de hidrogênio INTERAGE tão fortemente que, na verdade, formam uma molécula diatômica, H_2. Já a interação das moléculas diatômicas, H_2, de hidrogênio é

suficientemente fraca, de modo que as propriedades de uma porção de gás (real) de hidrogênio podem ser aproximadamente descritas por um modêlo de um gás IDEAL de MOLÉCULAS DIATÔMICAS INDEPENDENTES.

14. A ENERGIA DE INTERAÇÃO NO DOMÍNIO DA QUÍMICA

Dizer que não existe influência mútua entre as partículas de um SISTEMA IDEAL, i.e., que elas são INDEPENDENTES, significa dizer que a ENERGIA TOTAL do sistema é igual a soma das energias de cada uma das suas partículas. Quando isso não é verdade podemos concluir que o sistema não é ideal. A diferença percentual entre a energia total do sistema e a soma das energias das suas partículas indica o desvio do comportamento ideal do sistema, i.e., a ENERGIA DE INTERAÇÃO.

Por exemplo, sabemos que o calor específico, C_V, de quase tôdas as substâncias é da ordem de algumas calorias por mole por grau Kelvin. Sem cometer êrro de monta podemos assumir que o calor específico é uma constante, e daí concluir que a energia interna de qualquer substância (não incluindo a energia de repouso) é aproximadamente igual a $C_V T$, ou seja, da ordem de 1.000 cal/mole a temperaturas ordinárias ($300^{\circ}K$). Por outro lado o calor latente de vaporização, que mede aproximadamente a energia de interação entre as partículas da substância é também da ordem de 1.000 cal/mole (540 cal/g para a água, por exemplo). Podemos assim concluir que, pelo menos a temperaturas ordinárias, a maioria das substâncias não podem ser consideradas como sistemas ideais, já que a energia de interação entre as partículas é da mesma ordem de grandeza que a energia do sistema.

Algumas substâncias porém, se aproximam bem de um sistema ideal. É o caso, por exemplo, dos gases inertes cuja fraca reatividade é uma indicação de interações fracas. Em particular o calor latente de vaporização do He é sòmente da ordem de 20 cal/mole que é pequeno (2%) comparado com a energia do gás (da ordem de 1.000 cal/mole) a temperaturas ordinárias. Podemos pois, com boa aproximação, tratar uma porção de gás hélio como um SISTEMA IDEAL formado de ÁTOMOS de hélio.

O grau de IDEALIDADE de um sistema depende de como escolhemos as suas partes. Para ilustrar a importância dessa escôlha, vamos tomar o caso do gás hidrogênio. A temperaturas ordinárias a sua energia (não incluindo a energia de repouso) é da ordem ainda de 1.000 cal/joule. O calor de vaporização, i.e., a energia para decompor hidrogênio líquido em gás hidrogênio DIATÔMICO é da ordem de 100 cal/mole, o que mostra que a energia de interação entre MOLÉCULAS DIATÔMICAS, H_2, de hidrogênio é da ordem de 10% da energia total do sistema, e portanto uma porção de gás hidrogênio é RAZOÀVELMENTE UM SISTEMA IDEAL, se pensado como composto de MOLÉCULAS DIATÔMICAS. Por outro lado, a energia para quebrar uma molécula de H_2 é da ordem de 2 elétron-volt, ou seja, 40.000 cal/mole. Assim, vemos que uma porção de gás hidrogênio NÃO pode ser aproximado por um SISTEMA IDEAL DE ÁTOMOS, pois a energia de interação entre êsses átomos seria, à temperaturas ordinárias, da ordem de 40 vêzes maior que a sua energia cinética.

35. A ENERGIA DE INTERAÇÃO NO DOMÍNIO DA FÍSICA NUCLEAR

A seguir estudamos o grau de idealidade dos sistemas de interêsse da Física Nuclear, i.e., os NÚCLEOS atômicos. A energia de interação entre as partículas que formam o núcleo atômico é da ordem de UM MILHÃO de vêzes maior que a energia de interação entre os átomos que por sua vez é da ordem de MIL vêzes maior que a energia de interação entre moléculas. As próprias unidades de energia refletem a ordem de grandeza das energias: caloria/mole (moléculas), eV (átomos) e MeV (núcleos).

A experiência nos mostra que a energia de interação entre os NUCLEONS (partículas que formam o núcleo) é da ordem de 10 MeV, e que a energia total do núcleo (não incluindo a massa de repouso) é também da ordem de 10 MeV. Um núcleo, portanto, não constitui um sistema ideal. Essas energias nucleares são fantàsticamente grandes. De fato, 1 MeV = $1,6 10^{-12}$ joule, mas um mole = $6 \cdot 10^{23}$ átomos, e portanto, para um átomo com um só núcleon, 10 MeV/núcleon é da ordem de 10^{13} joules/mole, ou seja, da ordem de 10^{13} cal/mole. Tomando 10^{5} cal/mole como ordem de grandeza da energia química, vemos que a energia nuclear é da ordem de 10^{8} vêzes maior que a energia química, daí as expressões jornalísticas kiloton (10^{6} g) e megaton (10^{9} g).

A energia nuclear (i.e., a energia de interação entre os núcleons) sendo tão grande, não podemos mais desprezar o seu efeito sôbre a energia de repouso, i.e., a massa do núcleo. De fato, a massa de um próton equivale a uma energia da ordem de 10^{3} MeV, donde vemos que a energia de interação nuclear é da ordem de 1% da massa de repouso dos núcleons.

36. SISTEMAS IDEAIS DE PARTÍCULAS INDEPENDENTES

Experiências limitadas, do tipo da de Lavoisier, nos mostram que tanto na formação de um sistema a partir das suas partes (SÍNTESE) assim como na sua decomposição em partes (ANÁLISE) o pêso total de um sistema é igual, dentro da precisão limitada, à soma dos pêsos dos seus componentes. No entanto, existem inúmeros exemplos na Física Nuclear que nos mostram que a massa de um objeto complexo é ligeiramente diferente da soma das massas dos seus constituintes. Um exemplo disso é o caso do DEUTERON cuja massa é da ordem de 0,1% menor que a soma das massas do PRÓTON e do NEUTRON, componentes do deuteron, como foi discutido no § 6.

Devido 1) a possíveis movimentos internos das partículas e 2) a variação das massas dessas partículas com êsses movimentos é compreensível que haja alguma diferença de massa do sistema resultante, comparada com a soma das massas de REPOUSO das suas partes. Por essa razão, QUALQUER afirmação acêrca da relação entre a massa de um sistema e as massas das suas componentes, precisa ser BEM QUALIFICADA.

Apesar de que a maioria dos sistemas reais se desvia bastante de um sistema ideal, vamos inicialmente estudar os sistemas IDEAIS de partículas independentes por uma questão de método.

Para fixar idéias imaginemos um gás IDEAL sendo formado a partir de suas moléculas introduzindo-os numa caixa através de um furinho , o que servirá também para imaginar a decomposição do gás em moléculas dispersas. Imaginemos abandonar as várias moléculas, inicialmente afastadas uma das outras fora da caixa, com velocidades iniciais arbitrárias de modo a atravessar o furinho. Como as partículas de um SISTEMA IDEAL não se

influenciam mùtuamente, exceto pelas colisões, cada molécula atravessando o furinho conserva sua velocidade inicial, portanto sua massa, sua energia de repouso, sua energia cinética e portanto, sua energia total. Da mesma forma no processo de decomposição do sistema IDEAL, cada molécula saindo da caixa através do furinho conservará a velocidade que tinha quando "dentro" do sistema. Como a energia total se conserva, i.e., a soma das energias das moléculas antes de formarem o gás IDEAL deve ser igual à soma das suas energias depois de terem penetrado na caixa para formar o gás IDEAL, é LÍCITO e CONVENIENTE que adotemos a SOMA das energias instantâneas das moléculas como sendo a ENERGIA TOTAL do gás. Da mesma forma para a MASSA e o MOMENTUM.

Assim sendo, afirmamos que por definição, um SISTEMA IDEAL é aquêle em que a energia E, a massa M e o momentum P TOTAIS são iguais às somas das respectivas grandezas das suas partes, i.e., POR DEFINIÇÃO.

SISTEMA IDEAL:

$$E^{(R)} \triangleq \sum \epsilon_k^{(R)} \qquad (46)$$

$$\vec{P}^{(R)} \triangleq \sum \vec{p}_k^{(R)} \qquad (47)$$

$$M^{(R)} \triangleq \sum m_k^{(R)} \qquad (48)$$

Observações:

1) Letras minúsculas: m, p, ϵ , ... serão usadas para denotar grandezas referentes a PARTÍCULAS, ao passo que letras maiúsculas, M, P, E , ... denotarão grandezas referentes a um SISTEMA.

2) As somatórias acima se extendem sôbre tôdas as partículas do sistema, inclusive aquelas de massa de repouso nula, que contribuirão com seu momentum e energia.

3) O superscrito (R) explicita que as grandezas do primeiro membro se referem a um referencial R que é o mesmo ao qual se referem as grandezas parciais que comparecem no segundo membro. A fixação de um mesmo referencial é essencial, como veremos. Qualquer indefinição acêrca do referencial pode gerar mal-entendidos graves.

4) Da equivalência entre massa e energia de cada PARTÍCULA, i.e., $\epsilon_i = m_i c^2$, segue das Eqs. (46) e (48) que há também EQUIVALÊNCIA entre a massa e energia de um SISTEMA IDEAL:

$$\boxed{E^{(R)} = c^2 M^{(R)}} \qquad (49)$$

5) A Eq. (48) significa que num DADO REFERENCIAL a massa do SISTEMA IDEAL num determinado INSTANTE é igual à soma das massas instantâneas das suas PARTÍCULAS levando em conta a velocidade INSTANTÂNEA de cada uma dessas partículas em relação ao DADO REFERENCIAL. Já para um sistema REAL, devido às INFLUÊNCIAS MÚTUAS entre as partículas, essa afirmação não é verdadeira.

6) A Eq. (48) NÃO implica que a massa total de um sistema seja igual à soma das massas de REPOUSO das suas partes. Veremos que a Eq. (48) (juntamente com: a) a necessidade do referencial R, e b) com o resultado anterior da variação da massa com a velocidade) implica que "a massa

de REPOUSO de um sistema" é diferente da "soma das massas de repouso das suas partículas", (veja Eq. (57) abaixo) com um único caso excepcional sem interêsse e de certo modo trivial (veja logo abaixo da Eq. (58)).

7. TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

A energia e o momentum de um sistema se transformam pelas mesmas equações de transformação aplicáveis a partículas, i.e., TL1 e TL2.

$$P' = \gamma\left(P - \frac{uE}{c^2}\right) \qquad \text{TL3}$$

$$E' = \gamma\,(E - uP) \qquad \text{TL4}$$

Observação: Nas equações acima e em algumas que se seguem abreviaremos um referencial R' por ' e omitiremos o superscrito (R) que indica um referencial R. Isso para evitar congestionamento de índices. Por extenso, TL3 e TL4 deveriam ser escritas, respectivamente

$$P^{(R')} = \gamma_{R'}^{(R)}\left[P^{(R)} - u_{R'}^{(R)}\frac{E^{(R)}}{c^2}\right]$$

$$E^{(R')} = \gamma_{R'}^{(R)}\left[E^{(R)} - u_{R'}^{(R)}P^{(R)}\right]$$

onde, só para exemplificar a notação explícita, $\gamma_{R'}^{(R)}$ significa $\left\{1 - \left[u_{R'}^{(R)}\right]^2\right\}^{1/2}$ onde, por sua vez, $u_{R'}^{(R)}$ sig-

nifica a velocidade do referencial R' em relação ao referencial R. A forma abreviada de escrever as transformações de Lorentz, TL3 e TL4 evita o congestionamento de símbolos e não provocará mal-entendidos, desde que se observe aquilo que está explicitado nas equações completas, ou seja: as grandezas nos primeiros membros, E' e P' se referem a um referencial R' ao passo que tôdas as grandezas que comparecem nos segundos membros, E, P, γ e u se referem ao referencial R.

Demonstrações de TL3 e TL4:

Para cada partícula, k, valem as transformações de Lorentz de $R \longrightarrow R'$, TL1 e TL2 ($u \equiv u_{R'}^{(R)}$, $\gamma = \gamma(u) = \gamma_{R'}^{(R)}$).

$$p'_k = \gamma\left(p_k - \frac{u}{c^2}\epsilon_k\right)$$

$$\epsilon'_k = \gamma(\epsilon_k - up_k)$$

(importante: não confunda $u \equiv u_{R'}^{(R)}$ com v_k ou v'_k velocidades da partícula, que seriam denotadas respectivamente por $v_k^{(R)}$ ou $v_k^{(R')}$).

Somando ambos os membros de cada uma das equações acima sôbre tôdas as partículas do sistema (inclusive as de massa de repouso nula) temos

$$\sum_k p'_k = \sum_k \gamma\left(p_k - \frac{u}{c^2}\epsilon_k\right)$$

e

$$\sum_k \epsilon'_k = \sum_k \gamma(\epsilon_k - up_k)$$

Lembrando que u e γ se referem aos dois sistemas R e R' objetos de transformação, e que portanto, u e γ são os mesmos para tôdas as partículas, podemos colocá-los em evidência, fora das somatórias, isto é,

$$\sum_k \gamma(\epsilon_k - up_k) = \gamma\sum\epsilon_k - \gamma u\sum p_k$$

o que nos dá

$$\sum p'_k = \gamma\sum p_k - \gamma\frac{u}{c^2}\sum\epsilon_k$$

$$\sum\epsilon'_k = \gamma\sum\epsilon_k - \gamma u\sum p_k$$

que face às definições (46) e (47) nos dão,

$$P' = \gamma P - \gamma\frac{uE}{c^2} = \gamma\left(P - \frac{uE}{c^2}\right)$$

$$E' = \gamma E - \gamma uP = \gamma(E - uP) \,, \qquad \text{C.Q.D.}$$

38. A MASSA DE REPOUSO DE UM SISTEMA

Assim como para uma partícula, a diferença $E^2 - P^2c^2$ para um sistema, é também um INVARIANTE, i.e.,

$$\boxed{E^2 - P^2c^2 = \text{INVARIANTE}}$$

Demonstração: De TL3 e TL4 temos:

$$E'^2 - P'^2c^2 = \left[\gamma(E - uP)\right]^2 - \left[\gamma\left(P - \frac{uE}{c^2}\right)\right]^2$$

$$= \gamma^2(E^2 + u^2P^2 - 2\,uEP) - \gamma^2\left(P^2 + \frac{u^2}{c^4}E^2 - 2\frac{u}{c^2}EP\right)c^2$$

$$= \gamma^2(E^2 - P^2c^2) + \gamma^2\left(u^2P^2 - \frac{u^2}{c^2}E^2\right)$$

$$= \gamma^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)(E^2 - P^2c^2) = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)(E^2 - P^2c^2)$$

$$= E^2 - P^2c^2 , \quad \text{C.Q.D.}$$

OBS.: $E^2 - P^2c^2$ ser invariante significa que apesar de que a energia E e o momentum P, cada um em separado, tenham valores E, E', P e P' que dependem do referencial R, R', ..., etc, a diferença dos quadrados dos seus valores não depende do referencial. No caso de uma só partícula (veja Eq. (9)) o significado de $\epsilon^2 - p^2c^2$ era $m_o^2c^4$ (ou m_o^2), ou seja, o quadrado da massa de repouso da partícula. No caso de um sistema (objeto composto de partes) vamos usar o INVARIANTE acima para definir a massa de repouso dêsse sistema composto. Aproveitamos o caráter de INVARIÂNCIA da diferença $E^2 - P^2c^2$ e do seu significado no caso de uma partícula, para definir M_o a MASSA DE REPOUSO DE UM SISTEMA pela equação

$$\boxed{c^4M_o^2 \hat{=} E^2 - P^2c^2} \qquad (50)$$

ou, por analogia com a Eq. (9)

$$E^2 = M_o{}^2c^4 + P^2c^2$$

Dessa forma a massa de repouso de um sistema de partículas é um conceito bem definido (pela Eq. 50) e um atributo próprio do sistema, cujo valor numérico não depende de nenhum referencial, já que o segundo membro de (50) é invariante, conforme ficou demonstrado.

39. UM REFERENCIAL TODO ESPECIAL

A seguir queremos descobrir um método simples para calcular o valor da massa de repouso, o que virá a ser a Eq. (57) mais abaixo. Antes, porém, necessitamos introduzir a definição de um referencial especial, em relação ao qual o cálculo da massa de repouso de um sistema será bastante simplificado. Observamos que se o momentum total de um sistema fôr nulo (devido à compensação vetorial das velocidades de suas partes), o valor de M_o será, nesse caso, igual à energia do sistema, como fàcilmente se depreende da Eq. (50). No entanto, no caso geral de um sistema com momentum não nulo (já que o momentum de um sistema depende do referencial, de acôrdo com a TL3) podemos cogitar da possibilidade de encontrar um referencial particular que, se existir, chamaremos de REFERENCIAL DO CENTRO DOS MOMENTA ou REFERENCIAL DE REPOUSO do sistema em questão, abreviàdamente CM e em relação ao qual o momentum total do sistema é nulo. Essa definição se escreve

$$P^{(CM)} \hat{=} 0 \qquad (51)$$

A possibilidade de se encontrar um referencial CM que, para um DADO SISTEMA, satisfaça a Eq. (51), depende da estrutura do sistema em questão (veja observação 4 abaixo). Se êsse referencial existir, podemos ver da TL3 tomando $R' = CM$ e, portanto, $u = V_{R'}^{(R)} = V_{CM}^{(R)}$, que a sua velocidade $V_{CM}^{(R)}$ em relação a um referencial R será dada por

$$V_{CM}^{(R)} = c^2 \frac{P^{(R)}}{E^{(R)}} \qquad (52)$$

ou abreviadamente, sem possibilidade de mal-entendido:

$$V_{CM} = c^2 \frac{P}{E} \qquad (53)$$

<u>Demonstração</u>: De TL3 temos

$$P^{(CM)} = \gamma_{CM}^{(R)}\left(P^{(R)} - V_{CM}^{(R)}\frac{E^{(R)}}{c^2}\right)$$

portanto, da definição da Eq. (50), $P^{(CM)} = 0$, do sistema de centro de momentum, segue que

$$P^{(R)} = V_{CM}^{(R)}\frac{E^{(R)}}{c^2} \qquad \text{C.Q.D.} \qquad (54)$$

<u>Observações</u>:

1) O conceito de referencial de <u>centro de momentum</u> substitui o conceito de <u>referencial do centro de massa</u> de um sistema na Mecânica Clássica. De fato, na Mecânica Clássica o <u>centro de massa de um dado sistema é um ponto no espaço</u> tal que o momentum total do referido sistema em relação a um referencial ligado a êsse tal ponto, é nulo. Na Mecânica Relativística, a existência de um ponto no espaço

(que viria ser o centro de massa relativístico do sistema) é irrelevante. O que é importante é a possibilidade de se encontrar um referencial (e não um ponto) em relação ao qual P = 0. Na verdade acontece que o uso do conceito de centro de massa em Mecânica Relativística é condenável e desaconselhável, porque não é um conceito invariante, isto é, diferentes observadores atribuirão pontos diferentes como o "centro de massa". Já, com o referencial do centro de momentum isso não acontece, ou seja, se êsse referencial existir êle será o mesmo para todos os observadores, ou seja, é um conceito invariante.

2) Da equação (54) acima, $P^{(R)} = V_{CM}^{(R)} \frac{E^{(R)}}{c^2}$ e das Equações (5), (46) e (48), $E^{(R)} = M^{(R)} c^2$ podemos concluir que

$$\boxed{P^{(R)} = M^{(R)} V_{CM}^{(R)}} \qquad (55)$$

ou seja, que

> "Em relação a um referencial R qualquer, o momentum total de um corpo é igual ao momentum de uma única partícula, de massa igual à massa total $M^{(R)}$ do sistema em relação ao dito referencial R, animada de movimento com velocidade igual à velocida de $V_{CM}^{(R)}$ do referencial do centro de momentum, velocidade esta com relação ao mesmo dito R".

3) O resultado Eq. (55) é o análogo (e na verdade contém do teorema de Mecânica Clássica que afirma que o "momentum total de um sistema clássico é igual ao momentum

de uma única partícula de massa igual à massa total do sistema e animada de movimento com velocidade igual à do centro de massa do sistema. Os resultados diferem apenas pelos conceitos de centro de massa e centro de momentum e, como veremos abaixo, pelo valor da massa total.

4) Dizer que o referencial do centro de momentum existe, significa dizer que a sua velocidade V_{CM} em relação a um determinado (porém qualquer) referencial R é menor do que a velocidade da luz, i.e., $V_{CM} < c$. Vejamos quais os sistemas, que tendo $V_{CM} = c$, constituem as exceções, isto é, sistemas para os quais o referencial do CM não existe. Da Eq. (54) e de $V_{CM} = c$ temos em relação a qualquer referencial

$$P = E/c$$

ou seja, da Eq. (50)

$$M_o = 0$$

Concluímos, portanto, que sòmente para aquêles sistemas de massa de repouso total nula é que não é possível encontrar o referencial do C.M. (Pode-se também raciocinar diretamente em têrmos da Eq. (50), que é invariante, ou seja, se $M_o = 0$ (invariantemente) e se para um referencial CM, fôr $P^{(CM)} = 0$, a Eq. (50) implica $E^{(CM)} = 0$, o que significa que o sistema não existe (porque pelas TL3 e TL4 o seu P' e E' em qualquer outro referencial também seriam nulos). A única possibilidade para êsses sistemas ($M_o = 0$) é pois

$$E^2 = P^2c^2 \neq 0$$

Mais abaixo, analisaremos as estruturas de sistemas dêsse tipo, e concluiremos que o único sistema de massa de repouso nula é um feixe homogêneo de luz, não necessàriamente monocromática, ou seja, um feixe de fótons todos se propagando na mesma direção e sentido.

O. O VALOR DA MASSA DE REPOUSO DE UM SISTEMA IDEAL

A seguir mostraremos que o cálculo da massa de repouso de um sistema é mais simples no referencial do centro de momentum do sistema. Já que a massa de repouso M_o é um INVARIANTE, o cálculo de M_o no referencial do CM é GERAL e DEFINITIVO.

De fato, da Eq. (50)

$$M_o^2 = \frac{E^{(R)^2}}{c^4} - \frac{P^{(R)^2}}{c^2}$$

e da definição de referencial de centro de momentum, Eq. (51)

$$P^{(CM)} = 0$$

segue que

$$\boxed{M_o c^2 = E^{(CM)}} \qquad (56)$$

isto é, a massa de repouso de um sistema é igual à <u>Energia total</u> dêsse sistema em relação ao referencial do <u>seu</u> centro de momentum.

41. AS CONTRIBUIÇÕES PARA A MASSA DE REPOUSO DE UM SISTEMA IDEAL

Podemos explicitar o valor da massa de repouso de um SISTEMA IDEAL usando a Eq. (46)

$$E^{(CM)} = \sum \epsilon_k^{(CM)} ,$$

e lembrando que a energia de cada partícula pode ser escrita como a soma da energia de repouso ϵ_o e da energia cinética t,

$$\epsilon_k^{(CM)} = \epsilon_{o,k} + t_k^{(CM)}$$

onde $t_k^{(CM)}$ é a energia cinética da k-ésima partícula do sistema, em relação ao referencial do CM dêsse sistema. Podemos portanto escrever:

$$\boxed{M_o = \sum m_{o,k} + \sum t_k^{(CM)}/c^2} \qquad (57)$$

Como $t_k \geq 0$ temos

$$M_o \geq \sum m_{o,k}$$

isto é, a massa de repouso de um SISTEMA IDEAL é **sempre** maior ou igual à soma das massas de repouso de suas partículas.

O sinal de igualdade só vale no caso em que

$$\sum t_k^{(CM)} = 0$$

Ora, sendo cada $t_k \geq 0$, a somatória acima só é igual a zero quando cada $t_k^{(CM)}$ em separado fôr igual a zero (já que números positivos, t_k, não podem se compensar na sua soma!). Isso implica que a velocidade $v_k^{(CM)}$ de cada partícula em relação ao CM é nula, ou seja, que as velocidades de tôdas as partículas do sistema são iguais entre si, o que significa que a velocidade relativa de um par de partículas (isto é, a velocidade de uma partícula em relação à outra) é nula, o que implica que a distância entre quaisquer duas partículas do sistema permanece constante, com o decorrer do tempo. Êsse sistema na Mecânica Clássica corresponde a um corpo rígido.

Portanto, $M_o = \sum m_{o,i}$ só para corpo rígido da Mecânica Clássica, ou seja, "a massa de um corpo só é igual à soma das massas de suas partes, se êsse corpo fôr rígido".

2. A INÉRCIA DA ENERGIA

A Eq. (57) nos mostra que os MOVIMENTOS INTERNOS (i.e., movimentos em relação ao CM) de um SISTEMA contribuem para a massa de repouso. Vemos assim que determinada "quantidade de matéria" pode ter maior ou menor inércia dependendo dos seus movimentos internos. Tomemos, como exemplo, um mole de He^4, ou seja, 4 gramas de hélio. A temperaturas ordinárias (300^oK) a energia cinética devido ao movimento interno de agitação de seus átomos é da ordem de 1.000 cal/mole, ou seja, aproximadamente 4.180 joules. Dividindo êsse valor por $c^2 = (3 \cdot 10^8 \text{ m/seg})^2$ obtemos $5 \cdot 10^{-14}$ gramas como a inércia adicional das 4 gramas de He devida ao movimento interno. Um aumento de massa dessa ordem passa completamente desapercebido diante da sensibilidade de nossos melhores instrumentos, e assim se

explicam os resultados de LAVOISIER. No entanto, podemos afirmar que o CALOR, assim como outras formas de ENERGIA INTERNA, contribuem para a INÉRCIA de um corpo. Mais adiante mostraremos que em sistemas REAIS condensados, para os quais a ENERGIA INTERNA é NEGATIVA, a massa de repouso do sistema será MENOR que a massa de repouso das suas partículas.

43. A MASSA DE REPOUSO DA LUZ

Outro caso particular interessante e de resultado surpreendente é o caso de um sistema constituído ùnicamente de partículas de massa de repouso nula (por exemplo, um feixe de luz não unidirecional, porque?).

Nesse caso ($m_{o,k} \equiv 0$) (se o feixe não é unidirecional é possível encontrar o referencial do CM, já que os p_k não são todos paralelos) a Eq. (57) nos dá

$$M_o = \sum t_k^{(CM)} = E_{fótons}^{(CM)} > 0$$

o que implica que (a menos que só haja um fóton, ou que os vários fótons se propaguem na mesma direção e sentido) a massa de repouso de um gás de fótons (ou de qualquer partícula de massa de repouso nula) não é nula. Ainda mais a massa de repouso de um gás de fótons é igual à sua energia no referencial do CM.

44. A COMPOSIÇÃO DA ENERGIA TOTAL DE UM SISTEMA

A seguir mostraremos como a energia total de um sistema qualquer em relação a um referencial R arbitrário pode ser decomposto em energia de repouso e energia cinética, em analogia com a decomposição no caso de uma partícula.

De fato, das Eqs. (49), TL4 e (51) temos

$$E^{(R)} \triangleq M^{(R)}c^2 = \gamma_R^{(CM)}(E^{(CM)} - v_R^{(CM)}P^{(CM)})$$

$$= \gamma_R^{(CM)}E^{(CM)} = c^2M_o\gamma_{CM}^{(R)}$$

ou seja,

$$M^{(R)} = M_o\,\gamma_{CM}^{(R)} \tag{58}$$

Podemos escrever a Eq. (58) como

$$E^{(R)} = c^2M_o\gamma_{CM}^{(R)} + c^2M_o - c^2M_o = M_oc^2 + c^2M_o\left(\gamma_{CM}^{(R)} - 1\right) \tag{59}$$

Ora, no 2º membro da Eq. (59) o primeiro têrmo M_oc^2 não depende da velocidade do CENTRO DE MOMENTUM, ao passo que o segundo têrmo, $c^2M_o(\gamma - 1)$, depende da velocidade do CM através do têrmo γ_{CM}. Dessa forma, podemos escrever a Eq. (59) como

$$\boxed{E^{(R)} = M_oc^2 + T_{CM}^{(R)}} \tag{60}$$

onde $T_{CM}^{(R)} \triangleq c^2M_o(\gamma_{CM}^{(R)} - 1)$, por depender do movimento do CM em relação à R, através do têrmo $\gamma_{CM}^{(R)}$ tem o significado de energia cinética do centro de momentum, em relação ao referencial R. De fato, usando o valor de $\gamma_{CM}^{(R)}$ temos

$$T_{CM}^{(R)} = M_oc^2(\gamma_{CM}^{(R)} - 1) \cong M_o\left(\frac{1}{2}\,v_{CM}^{(R)2} + \frac{3}{8}\,v_{CM}^{(R)4}/c^2 + \dots\right)$$

"é a energia cinética de uma partícula de massa de repouso igual à massa de repouso do sistema, animada de movimento com velocidade igual à velocidade $V_{CM}^{(R)}$ do centro de momentum em relação a R, cujo valor é dado pela Eq.(52), $V_{CM}^{(R)}=c^2P^{(R)}/E^{(R)}$".

O resultado da Eq. (60) corresponde ainda à separação da energia, em energia devido a movimentos internos em relação ao CM, Eq. (57)

$$M_o c^2 = \sum \epsilon_i^{(CM)}$$

e a energia devido a movimento global (externo, que não implica em movimentos internos),

$$T_{CM} \cong \frac{1}{2} M_o V_{CM}^2 + \ldots \qquad (61)$$

45. A VARIAÇÃO DA MASSA E DA ENERGIA COM A VELOCIDADE

Outro resultado contido na Eq. (58) é a variação de massa total do sistema com a velocidade do seu centro de momentum. De fato, usando na Eq. (58) o valor de $\gamma_{CM} = 1/\sqrt{1 - V_{CM}^2/c^2}$, temos

$$M^{(R)} = M_o \gamma_{CM}^{(R)}$$

ou seja que,

$$\boxed{M^{(R)} = \frac{M_o}{\sqrt{1 - {V_{CM}^{(R)}}^2/c^2}}} \qquad (62)$$

Da mesma forma temos

$$E^{(R)} = \frac{E_o}{\sqrt{1 - V_{CM}^{(R)^2}/c^2}} \qquad (63)$$

que nos permite concluir que

> "a massa e a energia de um sistema aumentam com a velocidade de seu Centro de Momentum, segundo a mesma lei de variação da massa e da energia de uma partícula com sua velocidade, $m = m_o/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ ".

46. SISTEMAS REAIS

As propriedades dos SISTEMAS IDEAIS são fàcilmente analisadas em têrmos das propriedades das suas PARTES, como foi discutido nos §§ 36 - 45. O mesmo não acontece com SISTEMAS REAIS. No entanto, são justamente os SISTEMAS NÃO IDEAIS os mais interessantes. - Como reconhecer INTERAÇÕES nas partes de um sistema? De uma maneira genérica, propriedades tais como COESÃO, DUREZA, etc, são manifestações de FÔRÇAS atrativas ou repulsivas entre as partes de um sistema. Por exemplo, a REAÇÃO ao se COMPRIMIR ou DISTENDER uma mola helicoidal é uma manifestação das INTERAÇÕES entre os átomos que constituem a mola. Uma outra manifestação da NÃO IDEALIDADE de um sistema é a liberação ou absorção de energia no processo da sua formação a partir das suas partes, assim como no processo da sua decomposição.

De uma maneira mais fundamental para a Física Moderna a NÃO IDEALIDADE de certos sistemas pode ser reconhecida através da sua MASSA DE REPOUSO. Por exemplo, podemos afirmar que o DEUTERON não é um SISTEMA IDEAL formado por um PRÓTON e um NEUTRON, pois a MASSA DE REPOUSO do DEUTERON que é igual a 1.875,49 MeV é MENOR que a SOMA DAS MASSAS DE REPOUSOS DO PRÓTON E DO NEUTRON, respectivamente iguais a 938,21 MeV e 939,50 MeV. Êsse DÉFICIT de massa de repouso está em contradição com a desigualdade que segue a Eq. (57), que vale para qualquer sistema ideal. O DEUTERON portanto, não é um SISTEMA IDEAL. Devemos pois, buscar na INTERAÇÃO entre o NEUTRON e o PRÓTON a origem dêsse decréscimo de massa de repouso.

P. Calcule o déficit de massa do deuteron, i.e.,
$m_p + m_n - m_d$.

Os sistemas da natureza apresentam intera-

ções de vários tipos, v.g.

a) Interação GRAVITACIONAL: se manifesta entre todos os corpos.

b) Interação ELETROMAGNÉTICA: se manifesta entre ELÉTRONS, PRÓTONS e demais partículas CARREGADAS, e é a interação mais relevante aos fenômenos interatômicos tais como os da química.

c) Interação NUCLEAR: se manifesta entre NEUTRONS, PRÓTONS e outras partículas, MESMO DESCARREGADAS, que intervêm na formação dos NÚCLEOS atômicos.

d) OUTRAS interações que, embora de interêsse fundamental para o FÍSICO profissional, não são relevantes para a compreensão das propriedades dos sistemas do cotidiano atual.

De tôdas essas INTERAÇÕES, a interação ELETROMAGNÉTICA é a única que se conforma ao esquema de descrição da Teoria da Relatividade. Já as outras interações só podem ser descritas quando as velocidades das partes, umas em relação às outras são PEQUENAS comparadas com a velocidade da LUZ. Isso significa por exemplo, que o movimento conjunto de um ELÉTRON e um PRÓTON pode ser tratado de uma maneira satisfatória qualquer que seja a velocidade relativa, i.e., por maior (ou menor) que seja a energia do MOVIMENTO INTERNO. Assim, o ÁTOMO DE HIDROGÊNIO pode ser analisado teòricamente sob tôdas as condições, com o detalhe que se queira. O mesmo não acontece com um sistema formado por um PRÓTON e um NEUTRON, cuja interação AINDA é compreendida incompletamente. Apesar disso, já somos HOJE capazes de estudar APROXIMADAMENTE o movimento conjunto de um PRÓTON e NEUTRON a baixas velocidades relativas, ou seja, a energias INTERNAS pequenas comparadas com a massa (energia) de REPOUSO ($v \ll c$ implica $E_{total} \cong E_o$, ou seja, $E_o + E_{int} \cong E_o$,

ou seja, $E_{int} << E_o$). Isso significa que podemos discutir APROXIMADAMENTE o problema do DEUTERON e compreender o seu DÉFICIT de massa que, sendo da ordem de 1%, implica numa energia interna pequena (~ 20 MeV) comparada com a energia de repouso (1.000 + 1.000 MeV).

No caso de sistemas como o DEUTERON em que a energia interna é pequena, a DIFICULDADE maior são os FENÔMENOS QUÂNTICOS, ligados ao fato de serem as dimensões geométricas dos sistemas atômicos e nucleares muito pequenas. Os fenômenos QUÂNTICOS serão discutidos mais no fim dêste curso, já que ATÉ HOJE não se descobriu a relação ÍNTIMA entre o QUANTUM e a RELATIVIDADE.

Em suma, podemos discutir o movimento conjunto de um sistema de partículas qualquer que seja a natureza das suas INTERAÇÕES, desde que a ENERGIA DE INTERAÇÃO seja muito menor que a ENERGIA DE REPOUSO. Nessa aproximação introduzimos CONCEITOS NÃO RELATIVÍSTICOS tais como FÔRÇA e ENERGIA POTENCIAL, seguindo o esquema da FÍSICA CLÁSSICA não relativística. Sòmente para os sistemas de natureza ELETROMAGNÉTICA não se faz necessária a aproximação da Física Clássica. No entanto, mesmo nos fenômenos eletromagnéticos a metodologia da Física Clássica representa hábito confortável.

P. Calcule a velocidade de um próton ou de um neutron cuja energia cinética é igual a 1 eV.

47. UM EXEMPLO: O DEUTERON

Embora a Teoria da Relatividade seja impotente para tratar com EXATIDÃO TODOS OS DETALHES dos sistemas (não-ideais) com interação (excetuada a eletromagnética), ela fornece resultados EXATOS acêrca de ALGUMAS propriedades dêsses sistemas. Para melhor compreender a UTILIDADE

e as LIMITAÇÕES da Teoria da Relatividade aplicada a SISTEMAS NÃO IDEAIS vamos tratar da formação de um DEUTERON pela colisão de um próton com um neutron. Frequentemente essa reação é realizada fazendo um feixe de neutrons lentos, emergentes de um reator, incidir sôbre uma substância rica em prótons, parafina por exemplo. Os fatos são os seguintes:

F_1) Da colisão entre um próton e um neutron PODE resultar a formação de um deuteron.

F_2) À medida que a velocidade do neutron cresce a formação do deuteron se torna cada vez mais improvável, sendo que neutrons com velocidades maiores que 3.000 m/seg atravessam a parafina sofrendo sòmente um espalhamento, sem absorção.

F_3) Se resultar um DEUTERON, observamos NECESSÀRIAMENTE a aparição de um raio γ (fóton). Para energia cinética pequena a energia dêsse raio γ é aproximadamente 2,2 MeV.

F_4) A massa de repouso do deuteron formado é SEMPRE igual a 2,0140 uam (= 1.875,49 MeV). As massas de repouso do próton e do neutron são iguais respectivamente a 1,007825 uam = 938,21 MeV e 1,008665 uam = 939,50 MeV.

OBS.: "uam" é abreviação para "unidade atômica de massa", que é a unidade de massa mais comumente usada na Física Nuclear. Ela, de tempo em tempo, sofre alterações na sua definição. Atualmente a "uam" é definida como sendo a unidade de massa tal que a massa de um átomo de Carbono-12 seja igual a 12,000000. Assim, ela equivale a 931,478 MeV. Há até pouco tempo a "uam" era definida em relação ao Oxigênio-16.

P. Em MeV a massa de repouso de um elétron vale 0,511 MeV. Calcule essa massa em uam.

P. Calcule em eV a energia cinética de um neutron cuja velo cidade é igual a 3.000 m/seg.

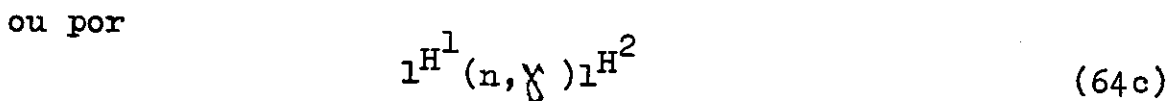
Frequentemente essa reação é simbolizada por

$$p + n \longrightarrow d + \gamma \qquad (64a)$$

ou por

$$_1H^1 + {}_0n^1 \longrightarrow {}_1H^2 + \gamma \qquad (64b)$$

ou por

$$_1H^1(n,\gamma)_1H^2 \qquad (64c)$$

Iniciamos a discussão do problema, elegendo um referencial. O referencial mais CONVENIENTE é sempre o do CM, que pode ser localizado assim. O referencial do CM - antes da colisão é, por definição, o referencial em relação ao qual o momentum total do sistema inicial próton-neutron énulo. Por exemplo, se os prótons estão contidos nos átomos de hidrogênio das moléculas de uma substância hidrogenada situada sôbre uma mesa no laboratório, e se os neutrons incidem de um reator em direção à tal mesa, com uma velocidade - de, por exemplo 10^3 m/seg, podemos localizar o referencial - do CM pelas seguintes considerações:

a. os prótons nas moléculas têm energia cinética desprezível, normalmente muito menor que 1 eV.

P. Calcule a velocidade de um próton ou neutron cuja energia cinética é igual a 1 eV.

b. os momenta do próton e do neutron de energias de ordem de eV são desprezíveis face aos outros momenta envolvidos na reação, por exemplo do raio γ emitido.

P. Calcule o momentum de um próton ou neutron cuja energia

cinética é igual a 1 eV.

P. Calcule o momentum de um raio γ de energia igual a 2 MeV.

Dessas considerações podemos concluir que o referencial do CM pode ser tomado como o referencial do laboratório, já que no laboratório o momentum total de sistema n-p é PRÀTICAMENTE NULO.

Apesar de que o deuteron resultante da colisão não é um sistema ideal, devido às fôrças nucleares que mantêm o neutron e o próton ligados mùtuamente, notamos o seguinte:

c) ANTES da colisão, a interação entre o próton e o neutron é desprezível por estarem êles afastados um do outro. No estado inicial o sistema próton-neutron é, pois, IDEAL.

d) DEPOIS da colisão, a interação entre o deuteron formado e o FÓTON acompanhante é desprezível. No estado final o sistema deuteron-fóton é, pois, IDEAL.

Temos, portanto, duas situações, uma ANTES da colisão e outra DEPOIS da colisão, em que estão envolvidos sistemas ideais. (Se estivéssemos dispostos a sacrificar a clareza em troca do rigor diríamos que temos DOIS ESTADOS IDEAIS (n-p) e (d-γ) de um SISTEMA).

Os nossos resultados dos parágrafos 36 - 45, referentes a sistemas ideais são, pois, aplicáveis ANTES e DEPOIS da colisão. Durante a colisão nada podemos dizer porque a Teoria da Relatividade não inclui métodos para discutir a interação responsável pela formação do deuteron e concomitante emissão do fóton.

A Eq. (48) nos diz, por exemplo, que a massa total M_i do sistema p-n antes da colisão é igual a

$$M_i = m_p + m_n = \frac{m_{o,p}}{\sqrt{1 - v_p^2/c^2}} + \frac{m_{o,n}}{\sqrt{1 - v_n^2/c^2}} \qquad (65)$$

onde v_p e v_n são as velocidades do próton e do neutron. No referencial do CM essa massa M_i é a MASSA DE REPOUSO do sistema ideal p-n, que pode ser escrita como

$$M_i = (m_{o,p} + T_p^{CM}/c^2) + (m_{o,n} + T_n^{CM}/c^2) \qquad (66)$$

onde T_p^{CM} e T_n^{CM} são respectivamente as energias cinéticas do próton e do neutron no referencial do CM.

Por outro lado, também pela Eq. (48) sabemos que DEPOIS da colisão a massa M_f do sistema d-γ em relação ao mesmo referencial do CM é igual a

$$M_f = m_d + m_\gamma = \frac{m_{o,d}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V_d^{CM}}{c}\right)^2}} + E_\gamma/c^2$$

ou explicitando a energia cinética

$$M_f = (m_{o,d} + T_d^{CM}/c^2) + (0 + E_\gamma^{CM}/c^2) \qquad (67)$$

onde V_d^{CM} é velocidade do deuteron em relação ao referencial do CM e E_γ^{CM} é a energia (massa) do fóton, também no referencial do CM.

Sabemos também que o momentum total do sistema d-γ DEPOIS do choque, em relação ao referencial do CM é

$$\vec{P}_f = \vec{p}_d + \vec{p}_\gamma = \frac{m_{o,d}\,\vec{V}_d^{CM}}{\sqrt{1 - \left(V_d^{CM}/c\right)^2}} + \vec{E}_\gamma^{CM}/c \qquad (68)$$

8. A UTILIDADE DA TEORIA DA RELATIVIDADE

Todo êsse conhecimento referente aos sistemas ideais, ANTES e DEPOIS, em SEPARADO, seria um conhecimento vazio SE A TEORIA DA RELATIVIDADE NÃO ESTABELECESSE UMA RELAÇÃO ENTRE OS ESTADOS INICIAL E FINAL DO SISTEMA. Essa relação é dada pelos axiomas fundamentais da Física: o Princípio da Conservação do Momentum e o Princípio da Conservação da Massa (ou da Energia que é equivalente à Massa).

Na solução de um grande número de problemas da Física de hoje é NECESSÁRIO e SUFICIENTE uma HÁBIL manipulação de:

1) Teoria da Relatividade,

2) Princípios de Conservação, e

3) Aproximação clássica para baixas velocidades.

Vamos exemplificar essa manipulação resolvendo o problema da formação do deuteron discutido no § 47, supondo que a energia cinética do neutron e do próton é pequena, por exemplo da ordem de 1 eV.

Os Princípios da Conservação do Momentum e da Conservação da Energia (massa)

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \qquad (69)$$

e

$$M_i = M_f \qquad (70)$$

aplicados ao nosso problema no referencial do CM nos dão

$$P_i \triangleq 0 \quad \therefore \quad P_f^{CM} = 0 \qquad (71)$$

ou seja,

$$\boxed{\vec{p}_d^{CM} + \vec{E}_\gamma^{CM}/c = 0} \tag{72}$$

e

$$\boxed{m_d^{CM} + E_\gamma^{CM}/c^2 = m_p^{CM} + m_n^{CM}} \tag{73}$$

As Eqs. (72) e (73) são suficientes para determinar a energia cinética do deuteron, ou seja, o módulo da sua velocidade. Por outro lado, elas não são suficientes para determinar a direção dessa velocidade. Nós só podemos afirmar que no referencial do CM o deuteron e o raio γ sairão em direção opostas, com momenta que se cancelarão vetorialmente.

Inicialmente vamos escrever as Eqs. (72) e (73) de modo a explicitar a energia cinética das partículas. Temos:

$$\vec{p}_d^{CM} = m_d^{CM}\,\vec{V}_d^{CM} = (E_d^{CM}/c^2)\vec{V}_d^{CM} \tag{74}$$

e

$$E_d^{CM} = m_{od}c^2 + T_d^{CM} \tag{75}$$

Portanto

$$\vec{p}_d^{CM} = (m_{od} + T_d^{CM}/c^2)\vec{V}_d^{CM} \tag{76}$$

A Eq. (72) se escreve, pois

$$\boxed{(m_{od} + T_d^{CM}/c^2)V_d^{CM} = E_\gamma^{CM}/c} \tag{77}$$

Por outro lado, de $m^R = m_o + T^R$, a Eq. (73) fica

$$\boxed{m_{od} + T_d^{CM}/c^2 + E_\gamma^{CM}/c^2 = m_{op} + m_{on} + T_p^{CM}/c^2 + T_n^{CM}/c^2} \quad (78)$$

Essas equações são EXATAS e podem ser resolvidas EXATAMENTE sem qualquer aproximação. Isso porque tanto no estado inicial como no estado final temos sistemas ideais. No entanto, estamos supondo que a energia cinética das partículas é desprezível comparada com as massas de repouso (1.000 MeV = 10^9 eV). Assim podemos, na Eq. (77), desprezar T_d/c^2 face a m_{od} e daí concluir que a velocidade de "recuo" do deuteron será aproximadamente (0,1%),

$$\boxed{\frac{V_d^{CM}}{c} = \frac{E_\gamma^{CM}}{m_{od}c^2}} \quad (79)$$

cujo valor numérico deve ser muito menor que a unidade, para não contradizer a hipótese. Empìricamente, $E_\gamma^{CM} \approx 2$ MeV e sendo $m_{od}c^2 \cong 2.000$ MeV podemos concluir que V_d^{CM}/c será da ordem de 0,1%, o que acarreta $(V_d^{CM}/c)^2 \sim 10^{-6}$, o que implica através da Eq. (pg. 38) $\left(\frac{\Delta m}{m} \cong \frac{1}{2} V^2/c^2\right)$ que T_d^{CM} será da ordem de $5 \cdot 10^{-7} \cdot m_{od}c^2 \approx 5 \cdot 10^{-7} \cdot 2.000$ MeV $\cong 1.000$ eV = 1 keV, o que confirma nossa hipótese: $m_{od} \gg T_d^{CM}/c^2$.

Essa energia de 1 keV é aproximadamente a ENERGIA CINÉTICA MÍNIMA DO DEUTERON PARA QUE O SEU MOMENTUM CORRESPONDENTE CANCELE O MOMENTUM DO FÓTON.

P. Calcule o momentum de um deuteron de energia igual a 1 keV. Compare com o momentum de um fóton de energia igual a 2 MeV.

Assim, na Eq. (78) podemos desprezar no segundo membro os têrmos T_p e T_n (que são da ordem de 1 eV ou menor) em comparação $T_d \sim 1$ keV, $E_\gamma \sim 2$ MeV e $m_o \sim 10^3$ MeV. Aquela equação fica, portanto,

$$E_\gamma^{CM} = (m_{op} + m_{on} - m_{od})c^2 - T_d^{CM} \tag{80}$$

ou seja,

$$E_\gamma^{CM} = (938{,}21 + 939{,}50 - 1.875{,}49)\ \text{MeV} - T_d^{CM} = 2{,}22\ \text{MeV} - T_d^{CM} \tag{81}$$

A energia cinética de recuo do deuteron pode ser calculada pela Eq. (79) usando-se a aproximação clássica, $T = \frac{1}{2} m_o v^2$. Então temos,

$$T_d^{CM} = \frac{1}{2} m_{od}c^2 \left(\frac{v_d^{CM}}{c}\right)^2 = \frac{1}{2} m_{od}c^2 \left(\frac{E_\gamma}{m_{od}c^2}\right)^2$$

$$= \frac{E^2_\gamma}{2\ m_{od}c^2} \tag{82}$$

que substituída na Eq. (81) e transpondo T_d^{CM} para o primeiro membro, nos dá

$$E_\gamma^{CM}\left(1 + \frac{E_\gamma^{CM}}{2\ m_{od}c^2}\right) = 2{,}22\ \text{MeV} \tag{83}$$

Como primeira aproximação, podemos, dentro do parêntesis, desprezar $E_\gamma \sim 2$ MeV face a $2\, m_{od}c^2 \sim 4.000$ MeV e então concluir que

$$E_\gamma^{CM} = 2,22 \text{ MeV} \tag{84}$$

que está em ótimo acôrdo com os fatos, F_3.

Uma vez obtido o valor de $E_\gamma = 2,22$ MeV podemos utilizar êsse valor aproximado na Eq. (83). Escrevendo a Eq. (83) sob a forma

$$E_\gamma^{CM} = \frac{2,22 \text{ MeV}}{1 + E_\gamma/2\, m_{od}c^2}$$

e expandindo o denominador em série, i.e., $1/(1+x) \cong 1-x$,

$$\frac{1}{1 + E_\gamma/2\, m_{od}c^2} \cong 1 - \frac{E_\gamma^{CM}}{2\, m_{od}c^2}$$

temos finalmente

$$E_\gamma^{CM} = 2,22 \text{ MeV}\left(1 - \frac{2,22 \text{ MeV}}{3.750 \text{ MeV}}\right) = 2,22(1 - 6\cdot 10^{-4}) \tag{85}$$

O recuo do deuteron modifica, pois, a energia do raio γ de 6 partes em 10^4, correção essa que só é importante em trabalhos de alta precisão.

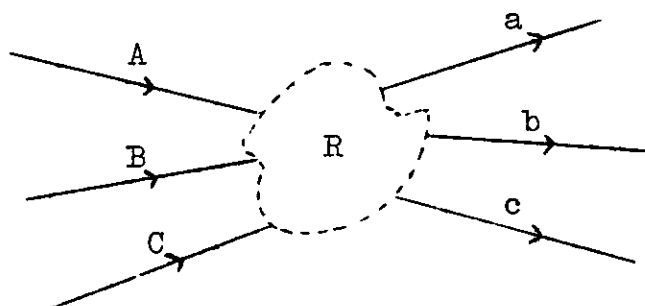
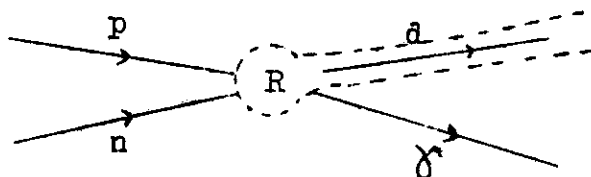
P. Discuta a reação inversa da formação do deuteron, i.e.: $d + \gamma \longrightarrow n + p$, chamada a foto-desintegração do deuteron, realizada pelo bombardeio de deuteron por raios γ. Supondo $V_d^{LAB} = 0$ calcule V_n^{CM} e V_p^{CM} em função de E_γ^{CM}. Mostre que a reação só ocorre para $E_\gamma^{CM} \geqslant 2,22$ MeV.

P. Foi usada a aproximação que $V_{CM}^{LAB} \cong 0$. Na verdade, V_{CM}^{LAB} é da ordem de 10^3 m/seg. Usando a transformação de Lorentz, TL2, calcule E_γ^{LAB} sabendo-se que $E_\gamma^{CM} = 2,22$ MeV e que V_{CM}^{LAB} é, por exemplo, 10^3 m/seg. Essa correção é importante ou não, face às Eqs. (84) e (85)?

. AS LIMITAÇÕES DA TEORIA DA RELATIVIDADE

Uma vez exemplificada a utilidade da Teoria da Relatividade, é necessário compreender as suas limitações. Por exemplo, ela não explica porque a energia do raio γ na formação do deuteron é igual a 2,2 MeV (Eq. 84). Isso é devido ao fato que a Teoria da Relatividade NÃO É CAPAZ DE CALCULAR A MASSA DE REPOUSO DO DEUTERON A PARTIR 1) DAS MASSAS DE REPOUSO DO PRÓTON E DO NEUTRON, 2) NOS MOVIMENTOS DESSAS PARTÍCULAS DENTRO DO DEUTERON e 3) DA ENERGIA DE INTERAÇÃO p-n. Se a Teoria da Relatividade nos permitisse calcular a massa de repouso do DEUTERON, o princípio da conservação da energia (massa) nos permitiria concluir que o déficit de massa (2.2 MeV) teria que ser compensado pela emissão de 2.2 MeV sob uma forma ou outra de energia. No entanto, o conteúdo da Teoria da Relatividade não é suficientemente amplo para tratar com EXATIDÃO de problemas que envolvem interações. Apesar disso a aplicação dos Princípios de Conservação juntamente com a Teoria da Relatividade cobre um grande número de situações importantes na Física Moderna. Por exemplo, a partir SÒMENTE do conhecimento das MASSAS de repouso do próton, do neutron e do deuteron, (F_4) que implicam num déficit de massa de 0,0025 uam, podemos concluir do Princípio da Equivalência entre Massa e Energia, e do Princípio da Conservação de Energia (Massa) que na formação de um deuteron a partir de um neutron e um próton será liberada sob uma forma ou outra, que não poderíamos especificar, uma ENERGIA equivalente a 0,0025 uam, ou seja, 2,2 MeV. O Princípio da Conservação do Momentum nos garante, ainda mais, que essa energia de 2,2 MeV deve também possuir um momentum adequado.

Gràficamente podemos exprimir o uso e as limitações da Teoria da Relatividade considerando o gráfico que simboliza uma reação

$$A + B + C \ldots \longrightarrow a + b + c \ldots$$

onde "A", "B", "C", etc, são partículas incidentes e "a", "b", "c", etc, são partículas emergentes. Essas partículas INTERAGEM quando estão localizadas dentro de uma região R. Fora de R as partículas não interagem, e podem ser consideradas como um sistema ideal, tanto A, B, C, ..., etc, como a, b, c, ... etc. Podemos aplicar a Teoria da Relatividade aos sistemas ideais inicial e final, MAS NÃO NA REGIÃO R DE INTERAÇÃO. Os Princípios de Conservação do Momentum e da Conservação da Energia (massa) nos permitem estabelecer RELAÇÕES entre os estado inicial e final. Embora êsses Princípios VALHAM TAMBÉM DENTRO DA REGIÃO R, aí a Teoria da Relatividade não é capaz de tratar da interação, i.e., da energia potencial, com EXATIDÃO. No caso do DEUTERON a região de INTERAÇÃO p-n envolve o deuteron, i.e., gràficamente, já que dentro do deuteron existem um próton e um neu

tron com uma interação (que os mantém ligados) que não é desprezível.

Gostaríamos de estudar o movimento relativo íntimo do próton e do neutron, suas órbitas, etc, dentro do deuteron. Para isso temos que introduzir a energia potencial de interação do próton com o neutron, e na Teoria da Relatividade não estão incluídos meios para discutir com EXATIDÃO êsses movimentos sob interação, a não ser no caso da interação eletromagnética. No entanto, a baixas velocidades podemos introduzir conceitos tais como fôrça e energia potencial, e resolver o problema aproximadamente, obtendo resultados que apesar de não serem exatos, são melhores que os da Mecânica Clássica.

A UTILIDADE DA MECÂNICA CLÁSSICA

Quando as velocidades são extremamente baixas a Teoria da Relatividade dá os mesmos resultados que a Mecânica Clássica, e por isso um grande número de problemas de Física e a grande maioria dos problemas de Química & Cia., para os quais a Física é relevante, podem ser tratados pela Mecânica Clássica, utilizando conceitos tais como fôrça e energia potencial. Essa é a razão para estudarmos a Mecânica Clássica e seus métodos.

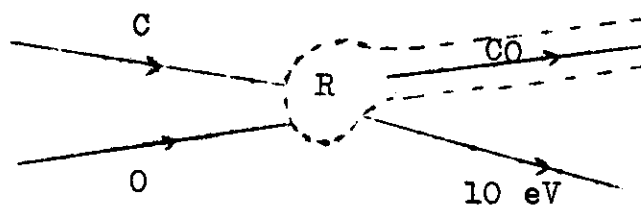
Por exemplo, da Química sabemos que da reação de Carbono com Oxigênio pode resultar monóxido de carbono. Consideremos, não a reação verdadeira que envolve moléculas diatômicas de oxigênio O_2 e talvez carbono sob forma de grafite, mas sim uma reação hipotética entre CARBONO GASOSO MONOATÔMICO e OXIGÊNIO GASOSO MONOATÔMICO.

$$C + O \longrightarrow CO \tag{86}$$

Sabemos, por meios indiretos da Química, que essa reação libera aproximadamente 220 kCal/mole, ou seja, aproximadamente 10 eV/molécula. Êsses 10 eV representam a

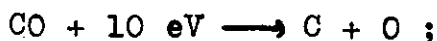
ordem de grandeza da energia de interação do átomo de carbono com o do oxigênio dentro da molécula de monóxido de carbono. Essa energia de 10 eV é tão menor ($\sim 3\cdot10^{-10}$) que a energia de repouso da molécula CO (C = 12, O = 16 $\therefore$ CO $\cong$ $\cong$ 28 uam $\cong 28\cdot10^{9}$ eV) que podemos desprezar qualquer efeito relativístico nas propriedades da reação e da molécula de CO e utilizar tranquilamente a Mecânica Clássica.

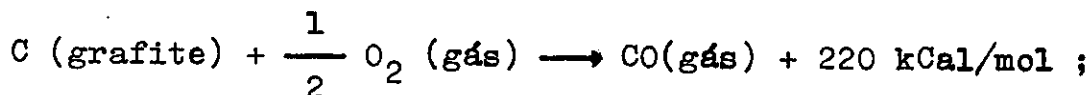
Os métodos da Física Clássica aplicados a êsse problema, levando em conta as várias interações ELETROMAGNÉTICAS entre os 14 elétrons e os dois núcleos seriam suficientes para prever que na reação (86) seriam liberados aproximadamente 10 eV mais a energia cinética inicial. Ainda mais êsses métodos da Física Clássica seriam suficientes para analisar com PRECISÃO os movimentos (órbitas, frequências, etc) dos átomos C e O dentro da molécula CO.

Isso significa que por se tratar de movimentos a baixíssimas velocidades a Física Clássica resolve o problema tanto fora da região de interação de C com O (conservação de momentum e de energia) assim como dentro da região R de interação de C com O, i.e., dentro da molécula CO. Gràficamente temos

Em particular a Mecânica Clássica nos daria que a massa da molécula de CO é igual à soma das massas dos átomos de Carbono e de Oxigênio, i.e., a Lei de Lavoisier.

Além do mais os métodos da Física Clássica seriam suficientes para analisar com PRECISÃO, (porém sem EXATIDÃO):

1) a reação inversa:

$$CO + 10\ eV \longrightarrow C + O\ ;$$

2) a reação macroscópica real:

$$C\ (grafite) + \frac{1}{2}\ O_2\ (gás) \longrightarrow CO(gás) + 220\ kCal/mol\ ;$$

3) os movimentos atômicos e moleculares no grafite, oxigênio e monóxido de carbono.

P. Um átomo de Oxigênio ($m_{Ox} \cong 16$ uam) com uma energia cinética no referencial do laboratório igual a 1 eV, incide sôbre um átomo de Carbono ($m_C \cong 12$ uam) em repouso no Laboratório. Calcule:

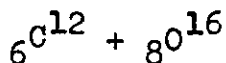
(1) V_{Ox}^{LAB}/c

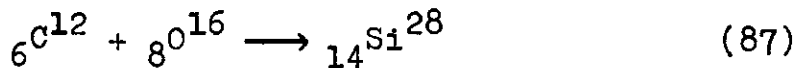
(2) V_{CM}^{LAB}/c

(3) T_{C+O}^{CM}/eV

51. O FRACASSO DA MECÂNICA CLÁSSICA

No entanto, se a energia cinética dos átomos de Carbono e Oxigênio fôr suficientemente grande, digamos 10^3 MeV (o que é difícil de se realizar) pode resultar uma reação esquisita do ponto de vista da Química. De fato, suponhamos que se trate dos isótopos mais comuns, C-12 e O-16, i.e.,

$${}_6C^{12} + {}_8O^{16}$$

Essa colisão com energia cinética bastante grande pode provocar a aproximação íntima dos dois núcleos e consequentemente a FUSÃO NUCLEAR formando um núcleo mais pesado, como no caso da formação do deuteron. O núcleo formado seria o (14, 28) que sendo 14 é Silício e portanto, ${}_{14}Si^{28}$, que é justamente o isótopo mais abundante do Si (93%). Teríamos

$$ {}_{6}C^{12} + {}_{8}O^{16} \longrightarrow {}_{14}Si^{28} \qquad (87) $$

com a liberação de uma certa quantidade de energia que logo será calculada.

Nesse caso, a Física Clássica daria resultados completamente em desacôrdo com a experiência.

A começar pela lei de Lavoisier (conservação da massa de repouso) que não é válida na reação (87) devido a enorme energia liberada que produz um déficit de massa. De fato, os valores empíricos das massas pertinentes são

$$ m({}_{6}C^{12}) = 12{,}00000 \text{ uam} $$

$$ m({}_{8}O^{16}) = 15{,}99491 \text{ uam} \qquad (88) $$

$$ m({}_{14}Si^{28}) = 27{,}9769^{3} \text{ uam} $$

o que evidencia um déficit de massa igual a 0,0180 uam, que é equivalente a 16,8 MeV.

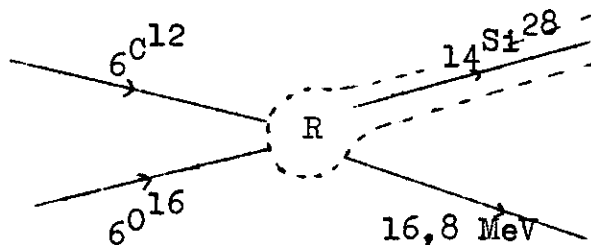
Nesse caso a Teoria da Relatividade (Princípio da Conservação da Massa e da Equivalência Massa-Energia) nos garante que será liberada DE UMA FORMA OU DE OUTRA uma energia igual a 16,8 MeV mais a energia cinética dos núcleos incidentes. O Princípio da Conservação do Momentum nos garante que essa energia possui um momentum adequado para cancelar o momentum de recuo do núcleo de Silício formado.

P. Supondo que na reação (87) o déficit de massa seja carregado sob a forma de um ÚNICO raio γ , e repetindo as etapas do § 48 calcule:

a) a velocidade de recuo V_{Si}^{CM} do núcleo de Si ;

b) a energia cinética correspondente. É necessário usar a equação relativística?

52. NOVAMENTE AS LIMITAÇÕES DA TEORIA DA RELATIVIDADE

Apesar de que a Teoria da Relatividade nos permite calcular os detalhes do estado final da reação (87) (i.e., energia liberada e o recuo do núcleo de ${}_{14}Si^{28}$), ela não seria suficiente para tratar dos movimentos (órbitas, frequências, etc) internos do núcleo de ${}_{14}Si^{28}$ resultante, a não ser de uma maneira aproximada. Essa incapacidade reflete a limitação da Teoria da Relatividade ao tratar de sistemas com interação (no caso, o núcleo de ${}_{14}Si^{28}$). No caso da reação (86) a Mecânica Clássica era capaz não só de calcular os detalhes do estado final (i.e., energia liberada e o recuo da molécula de CO) mas TAMBÉM dos detalhes dos movimentos internos (órbitas, frequências, etc) da molécula CO resultante. Isso é devido ao fato que a velocidade das partículas (14 prótons e 14 neutrons) que compõem o núcleo de ${}_{14}Si^{28}$ são comparáveis à velocidade da luz, ao passo que a velocidade dos átomos de C e O que formam a molécula CO é baixíssima comparada com a velocidade da luz.

53. A TEORIA DA RELATIVIDADE E A ENERGIA POTENCIAL

Apesar de que a Teoria da Relatividade não se aplica ao estudo dos movimentos internos de um sistema com imteração, ela se aplica ao estudo dos movimentos externos dêsses sistemas, i.e., aos movimentos dêsses sistemas considerados como partículas. Assim, a Teoria da Relatividade não se aplica (ou melhor, só se aplica APROXIMADAMENTE) ao estudo dos movimentos internos dos prótons e dos neutrons dentro de um núcleo, por exemplo, deutério, carbono, oxigênio ou silício. Portanto, a Teoria da Relatividade não é adequada para calcular com exatidão, por exemplo, a MASSA DE REPOUSO do deuteron a partir das massas de repouso do próton e do neutron, de seus movimentos INTERNOS e de sua interação. Isso significa que a Teoria da Relatividade não pode extender a Eq. (57) para incluir COM EXATIDÃO o efeito da INTERAÇÃO sôbre a massa de repouso de um sistema, ou seja, sôbre a sua ENERGIA INTERNA. No entanto, uma vez conhecida EMPÌRICAMENTE a massa de repouso de um sistema REAL, p.ex. deuteron, carbono, oxigênio, silício, etc, a Teoria da Relatividade se aplica ao estudo dos movimentos externos dêsses sistemas reais, por exemplo, ao estudo da reação (87).

Se quisermos estudar APROXIMADAMENTE os movimentos INTERNOS de um sistema cujas partículas interagem mùtuamente, somos levados a introduzir o conceito de ENERGIA POTENCIAL da Mecânica Clássica para descrever como a interação depende da CONFIGURAÇÃO do sistema. Isso não pode ser feito de uma maneira VÁLIDA PARA TODOS OS REFERENCIAIS (a não ser no caso da interação eletromagnética) o que viola o Princípio da Relatividade. No entanto, se as velocidades dos movimentos internos no referencial do CM são pequenas, comparadas com a velocidade da luz, podemos introduzir o conceito de ENERGIA POTENCIAL de interação e estudar os vários estados de movimento interno. Dessa maneira podemos calcular a

energia INTERNA, i.e., a energia em relação ao referencial do CM, o que significa a massa de repouso. Por falta de melhor aviso estudamos êsses movimentos internos supondo que a massa de repouso de cada partícula componente não é alterada pela sua interação com as demais companheiras. Isso significa que no caso do DEUTERON, por exemplo, estudamos os movimentos internos conjuntos de um próton e neutron com uma certa energia cinética, uma certa energia potencial, e cujas massas de repouso são as mesmas que cada uma dessas partículas tem quando estão isoladas. Já mencionamos que no caso de movimentos intraatômicos e intranucleares a dificuldade maior são os fenômenos quânticos.

No caso do deuteron um estudo dêsse tipo incluindo os efeitos quânticos, nos indica que o déficit de massa de 2,2 MeV provém de aproximadamente 20 MeV de energia cinética e -22 MeV de energia potencial correspondente à atração mútua entre o próton e o neutron. Isso corresponde a escrever

$$m_{od} = m_{op} + m_{on} + T^{CM} + U \qquad (89)$$

onde T^{CM} no caso do deuteron vale aproximadamente 20 MeV e U aproximadamente -22 MeV.

No caso do átomo de hidrogênio, i.e., o estudo dos movimentos internos de um sistema constituído por um próton e um elétron, nos dá $T^{CM} = 13,6$ eV e $U = -27,2$ eV, o que implica um déficit de massa a T + U igual a -13,6 eV.

54. A COMPOSIÇÃO APROXIMADA DA MASSA DE REPOUSO DE UM SISTEMA REAL

A Eq. (89) é um caso particular da expressão da massa de repouso de um sistema de partículas com interação, segundo um esquema de aproximação em que as interações

mútuas são descritas por uma energia potencial.

Dentro dessa aproximação podemos escrever a massa de repouso M_o de um sistema real

$$\boxed{M_o = \sum m_{ok} + \sum t_k^{CM} + U = \sum m_{o,k} + E_{int}} \qquad (90)$$

onde t_k é a energia cinética da $k^{ésima}$ partícula no seu movimento interno em relação ao referencial do CM, i.e., em relação ao referencial em que o sistema (partícula ou não) como um todo, está em repouso; U é a energia potencial TOTAL. A soma $U + \sum t_k^{CM}$ foi denominada de ENERGIA INTERNA porque ela é a parte da ENERGIA DE REPOUSO do sistema que depende dos MOVIMENTOS e CONFIGURAÇÕES INTERNOS. Se as fôrças são predominantemente atrativas a energia potencial é NEGATIVA e se essas fôrças são suficientemente fortes, U poderá em módulo ser maior que $\sum t_k^{CM}$, o que resultará numa massa de repouso MENOR que as somas das massas de repouso, i.e., energia interna negativa, que é o caso do deuteron e de todos os sistemas ligados.

A Eq. (90) é uma generalização (embora aproximada) da Eq. (57). Excetuada essa Eq. (57) |que dá seu lugar à Eq. (90)|, tôdas as equações dos §§ 36-45 referentes a sistemas IDEAIS permanecem válidas também para SISTEMAS REAIS.

55. CONSERVAÇÃO DA MASSA DE REPOUSO DE UM SISTEMA ISOLADO

Nos exemplos das reações da formação do deuteron pela colisão de um neutron e um próton, e da formação do $_{14}Si^{28}$ pela colisão de $_6C^{12}$ com $_8O^{16}$ pudemos observar que a massa de repouso das partículas envolvidas não se conserva entre o início e o final da reação. No entanto, notando que:

1) a massa de repouso de um sistema, tanto IDEAL, como REAL, é a ENERGIA dêsse sistema no referencial particular do CM;

2) o princípio da Conservação de Energia (Massa) vale em qualquer referencial

podemos concluir que

"A MASSA DE REPOUSO DE QUALQUER SISTEMA (IDEAL OU REAL) ISOLADO SE CONSERVA".

O déficit Massa de Repouso nos exemplos mencionados não constitui uma violação da Conservação da Massa de Repouso. É necessário compreender que o que se conserva é a massa de repouso de um sistema ISOLADO, o que significa, por exemplo, que no caso da formação do deuteron não podemos deixar escapar o raio γ que, fazendo parte do estado final do sistema, contribui para a massa de repouso do sistema no estado final, assim como também contribui a energia cinética do deuteron.

Consideremos a reação de formação do deuteron a partir de um próton e de um neutron em repouso (i.e., com velocidades desprezíveis) dentro de uma "caixa". No final da reação teremos um deuteron com uma velocidade baixa, Equação (79), e com energia cinética desprezível, 1 keV pela Equação (82). Juntamente com o deuteron teremos a emissão de um raio γ de 2,2 MeV. Consideremos dois casos: a) caixa de paredes finas, "opacas" para o deuteron, porém "transparentes" para o raio γ, que portanto escapa do sistema; b) caixa de paredes grossas, "opacas", tanto para o deuteron como para o raio γ, que portanto é ABSORVIDO pela parede.

No caso (a) teremos no estado final um deuteron pràticamente em repouso (1 keV), cuja massa (de repouso) é 1.875,49 MeV, e portanto menor que a massa de repouso ini-

cial, ou seja, $m_p + m_n = 938,21$ MeV + 939,50 MeV = 1.877,71 MeV. Nesse caso há um aparente déficit de massa de repouso equivalente a 2,22 MeV. A massa de repouso diminuiu porque o sistema não está ISOLADO. De fato um raio γ escapou carregando os 2,2 MeV correspondentes ao déficit de massa (numa análise EXATA da reação devemos incluir na massa de repouso do estado final, também a energia cinética em relação ao CM, 1 keV, do deuteron formado, que é, no entanto, desprezível).

No caso (b) temos duas maneiras de encarar o sistema: 1) incluimos a "caixa" como parte do sistema, ou 2) não a incluimos.

Se a "caixa" não foi incluída como parte do sistema então a massa de repouso do sistema terá diminuído, novamente, de 2,2 MeV. No entanto, podemos afirmar que tendo a "caixa" ABSORVIDO o raio γ a sua massa de repouso terá sofrido um aumento de 2,2 MeV. Nesse caso podemos concluir que se a massa do sistema p-n diminuiu, então a massa de um outro sistema ("caixa") aumentou exatamente do mesmo valor. Essa é uma das maneiras de enunciar qualquer Princípio de Conservação.

Por outro lado, incluindo a "caixa" como parte do sistema, não haverá diminuição de massa de repouso do sistema amplo. De fato chamando de M a massa de repouso da "caixa" no início da reação e M' a sua massa no final da reação teremos M' = M + 2,2 MeV devido ao acréscimo de massa da caixa pela absorção do raio γ de 2,2 MeV que provàvelmente produzirá um AQUECIMENTO da "caixa". Assim, teremos:

$$m_p + m_n + M = m_d + M'.$$

P. Assumindo valores razoáveis para o calor específico e para a massa da "caixa", calcule a elevação de temperatura da "caixa" devida à absorção do raio γ de 2,2 MeV.

P. Nas condições do P. anterior calcule quantos raios γ de 2,2 MeV seriam necessários para produzir um aumento de temperatura da ordem de 10^{-3} °C. Calcule, então, a massa de Deutério produzida. Em seguida, discuta a possibilidade de se calcular a energia do raio γ calorimètricamente, i.e., medindo o aumento de temperatura, e a quantidade de deutério produzida.

Um exemplo bastante comum nos livros, e de certo modo deletério é a colisão totalmente inelástica de duas bolas idênticas. Se m_o é a massa de repouso de cada bola e v e $-v$ as suas velocidades no CM temos

$$E_i^{CM} = 2m_oc^2 + 2\ T^{CM} \qquad (91)$$

onde T é a energia cinética de cada bola em relação ao CM. Após a colisão (totalmente inelástica) teremos uma única partícula, que, pelo Princípio da Conservação do Momentum, está em repouso no referencial do CM, e cuja energia E_f, no referencial do CM, é pelo Princípio da Conservação da Energia (massa), igual a E_i, ou seja,

$$E_f^{CM} = 2(m_oc^2 + T^{CM}) \qquad (92)$$

Como a partícula está em repouso no referencial do CM, E_f^{CM} é a própria massa (energia) de repouso, ou seja,

$$M_o = 2(m_o + T^{CM}/c^2) \qquad (93)$$

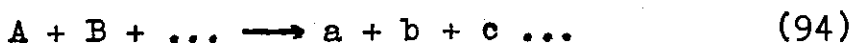
onde M_o é a massa de repouso da partícula "composta" após a colisão.

Costuma-se (inadvertidamente) dizer que "a massa de repouso do objeto composto é maior, porque a energia cinética inicial 2T foi convertida em energia interna (calor) e em energia potencial (deformação). Embora essas considerações sejam justas não é conveniente excluirmos da massa de

repouso do sistema inicial de "duas bolas" a sua energia cinética inicial $2T^{CM}$. Se incluirmos essa energia cinética inicial na massa de repouso do sistema inicial, como aliás nos obriga a Equação (57), então não terá havido variação de massa de repouso devido à colisão inelástica. Nesse exemplo, a aparente variação de massa de repouso de um sistema não é devido a termos considerado um sistema aberto, mas sim devido a uma comparação que não envolve reação ou processo físico algum. Isto é, $2m_o$ é a massa de repouso de duas bolas, CADA UMA em repouso, e que por estarem em repouso jamais poderiam colidir e formar um objeto de massa diferente de $2m_o$.

56. O VALOR DE UMA REAÇÃO

Se analisarmos uma reação do tipo

$$A + B + \ldots \longrightarrow a + b + c \ldots \qquad (94)$$

verificamos que a SOMA das massas de repouso do primeiro membro, $m_{oA} + m_{oB} + \ldots$, em geral não é igual à SOMA das massas de repouso do segundo membro, $m_{oa} + m_{ob} + m_{oc} + \ldots$. Situações tais foram encontradas nas reações (64) e (87).

Já compreendemos a razão dessa variação de massa de repouso, à luz da Conservação da Energia, i.e., essa variação de massa de repouso é compensada pela variação da energia cinética. Justamente para poder predizer a variação da energia cinética provocada pela reação é que a COMPARAÇÃO DA SOMA DAS MASSAS DE REPOUSO é uma comparação útil.

De fato, na reação (94) não existe interação entre as partes A, B, ... do sistema inicial, nem entre as partes a, b, c, ... do sistema final, embora existam interações, por exemplo, entre as partículas que formam a partícula A. No entanto, essas interações são empìricamente des-

critas pelo valor da massa de repouso da partícula A. Isso significa que o sistema inicial A, B ... é um sistema IDEAL, embora as suas partículas componentes A, B ... não o sejam. Sendo sistemas ideais, temos para as massas de repouso do sistema inicial e do sistema final,

$$M_o^{(i)} = \sum m_{o,i} + \sum t_i^{CM} \qquad (95)$$

e

$$M_o^{(f)} = \sum m_{o,f} + \sum t_f^{CM} \qquad (96)$$

onde i = A, B ... e f = a, b, c ... .

Pelo Princípio da Conservação da Massa (Energia) temos $M_o^{(i)} = M_o^{(f)}$, ou seja,

$$\sum m_{o,i} + \sum t_i^{CM} = \sum m_{o,f} + \sum t_f^{CM} \qquad (97)$$

Denotando a energia cinética EXTERNA TOTAL no início e no final da reação por T_i^{ext} e T_f^{ext}, i.e.,

$$\sum t_i^{CM} \hat{=} T_i^{ext} \quad \text{e} \quad \sum t_f^{CM} \hat{=} T_f^{ext} \qquad (98)$$

podemos escrever a Eq. (97) sob a forma

$$\sum m_{oi} - \sum m_{of} = T_f^{ext} - T_i^{ext} \qquad (99)$$

que exprime, justamente, que qualquer variação da SOMA das massas de repouso é compensada pela variação de energia cinética EXTERNA (i.e., não incluindo energia cinética interna a cada partícula A, B ... a, b, c ...).

A variação das SOMAS das massas de repouso de uma reação se chama o VALOR dessa REAÇÃO, que é denotado pela letra Q, i.e.

$$\boxed{\text{VALOR} = Q \hat{=} \sum m_{o,i} - \sum m_{o,f}} \qquad (100)$$

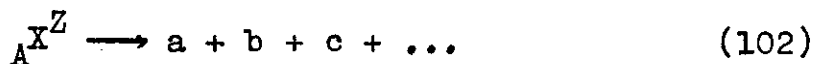
Da definição do VALOR de uma reação,Eq.(100), e da Eq. (99) podemos, no caso de uma reação cujos estados inicial e final são, AMBOS, sistemas IDEAIS, concluir que o VALOR Q dessa reação representa a VARIAÇÃO DA ENERGIA CINÉTICA PRODUZIDA pela reação, i.e.,

$$Q = T_f^{ext} - T_i^{ext} \tag{101}$$

Essa variação é importante (e portanto o conceito de VALOR), porque é justamente a ENERGIA CINÉTICA EXTERNA aquela parte da energia de um sistema que pode ser utilizada retirando-a do sistema. Por exemplo, no caso da formação do deuteron, a energia cinética do raio γ pode ser aproveitada, por exemplo, para aquecer a "caixa". A letra Q é reminiscente do símbolo usado para exprimir "quantidade de calor". Note que a definição de VALOR Q é tal, que êle é positivo quando a reação provoca um aumento de energia cinética, e negativo no caso contrário. Reações úteis são, pois aquelas cujo Q é POSITIVO.

57. DESINTEGRAÇÃO NUCLEAR

Vamos considerar um núcleo $_AX^Z$ cuja massa de repouso denotaremos por M_X. Suponhamos que êle se desintegre EXPONTÂNEAMENTE em vários núcleos menores, elétrons, fótons, etc, a, b, c, ..., cujas massas serão denotadas por m_{oa}, m_{ob}, etc. O referencial do CM é aquêle em que o núcleo inicialmente se encontra em repouso. A reação de desintegração se escreve

$$_AX^Z \longrightarrow a + b + c + \ldots \tag{102}$$

O VALOR dessa reação é, por definição, igual a

$$Q \hat{=} M_X - \sum m_{ok} \qquad (103)$$

$k = a, b, c \ldots$. Nesse caso $T_i^{ext} = 0$, e o significado do valor da reação é, de acôrdo com a Eq. (101)

$$Q = T_f^{ext} = \sum t_k \qquad (104)$$

onde está subentendido que a energia cinética é em relação ao referencial do CM, i.e., em relação ao núcleo inicial. Da Eq. (103) vemos que O VALOR Q DE UMA REAÇÃO DE DESINTEGRAÇÃO EXPONTÂNEA É IGUAL À ENERGIA CINÉTICA DOS PRODUTOS DA DESINTEGRAÇÃO.

P. Um neutron isolado se desintegra expontâneamente, e estatìsticamente em 12 min, produzindo um próton, um elétron e um neutrino, i.e.,

$$n \longrightarrow p + e + \nu \qquad (105)$$

Calcule em MeV o VALOR dessa reação de desintegração, a partir das massas de repouso:

$$m_n = 1{,}008665 \text{ uam}$$
$$m_{op} = 1{,}007825 \text{ uam}$$
$$m_{oe} = 0{,}00055 \text{ uam}$$
$$m_{o\nu} = 0$$

Calcule o momentum e a energia cinética do próton, para se convencer que a energia cinética do próton é desprezível, devido à sua grande massa de repouso (imite a discussão da reação de formação do deuteron). Face a êsse resultado, qual é o significado do VALOR dessa reação?

Se o valor Q de uma reação de desintegração do tipo (102) é NEGATIVO a Eq. (104) nos mostra que as partículas resultantes deveriam ter uma energia cinética NEGATIVA, o que é absurdo. Concluimos portanto que um $Q < 0$ é SUFICIENTE para excluir a possibilidade de certas desintegrações expontâneas.

P. Suponha que um próton possa se desintegrar expontâneamente em 1) um neutron, 2) uma partícula X de carga positiva e massa de repouso diferente de zero e 3) uma partícula Y de massa de repouso nula, i.e.,

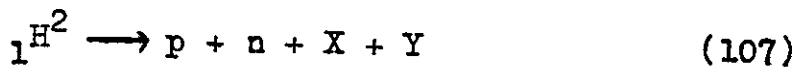
$$p^+ \longrightarrow n + X^+ + Y \tag{106}$$

onde

$m_{op} = 1{,}007825$ uam
$m_{on} = 1{,}008665$ uam
$m_{oX} \neq 0$ e
$m_{oY} \equiv 0$

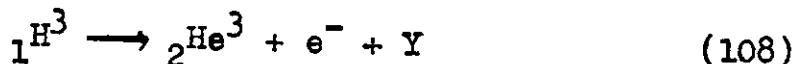
Mostre que essa reação (106) é IMPOSSÍVEL, QUALQUER que seja a partícula X. Compreenda, assim, a razão da ESTABILIDADE do próton.

P. Da mesma forma prove que DEUTERON é estável, i.e., a reação

$$_1H^2 \longrightarrow p + n + X + Y \tag{107}$$

é impossível qualquer que sejam as partículas X e Y, $m_{oX} \neq 0$ e $m_{oY} \equiv 0$.

$$m_d = 2{,}0140 \text{ uam.}$$

P. Da mesma forma prove que o TRITIO ($_1H^3$) é susceptível de se desintegrar segundo a reação

$$_1H^3 \longrightarrow {_2He^3} + e^- + Y \tag{108}$$

onde

$$m_o({}_1H^3) = 3{,}01605 \text{ uam}$$

$$m_o({}_2He^3) = 3{,}01603 \text{ uam}$$

$$m_o(e) = 0{,}00055 \text{ uam}$$

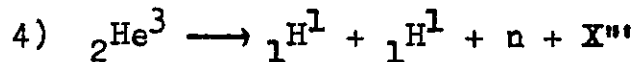
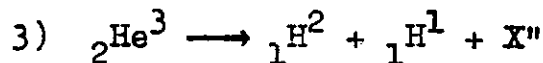
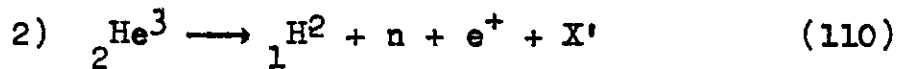
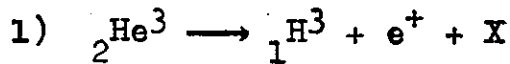
Compreenda assim porque o TRITIO é de fato instável, decaindo para hélio-3 estatìsticamente em 12 anos.

P. Analise a possibilidade do trítio se desintegrar, emitindo um neutron, i.e.

$$ {}_1H^3 \longrightarrow {}_1H^2 + n + Y \qquad (109)$$

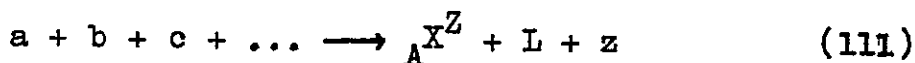
onde m_Y poderia ser nula.

P. Analise as várias formas que um núcleo de hélio-3, ${}_3He^2$ poderia se desintegrar expontâneamente, i.e.,

$$\begin{aligned} &1) \quad {}_2He^3 \longrightarrow {}_1H^3 + e^+ + X \\ &2) \quad {}_2He^3 \longrightarrow {}_1H^2 + n + e^+ + X' \\ &3) \quad {}_2He^3 \longrightarrow {}_1H^2 + {}_1H^1 + X'' \\ &4) \quad {}_2He^3 \longrightarrow {}_1H^1 + {}_1H^1 + n + X''' \end{aligned} \qquad (110)$$

calculando o valor Q de cada uma dessas reações. Então compreenda porque o ${}_3He^2$ é ESTÁVEL.

58. FUSÃO NUCLEAR

O inverso de uma reação de desintegração (102) de um núcleo, é a reação

$$a + b + c + \ldots \longrightarrow {}_A X^Z + L + z \qquad (111)$$

Essa reação significa que vários núcleos (normalmente DOIS) a, b, c ... se juntam formando um ÚNICO núcleo X, (e eventualmente uma partícula leve L com massa de repouso muito menor que M_X e alguma partícula z de massa de repouso nula, veja Eq. (113)). Êsse processo se chama FUSÃO NUCLEAR, e ao que tudo indica SERÁ "A" FONTE DE ENERGIA DO FUTURO PRÓXIMO. A reação de fusão MAIS SIMPLES é a FUSÃO DE UM PRÓTON COM UM NEUTRON, PRODUZINDO O DEUTERON E UM RAIO γ, Eq. (64).

O VALOR dessa reação é, por definição, igual a

$$Q \hat{=} \sum m_{ok} - (M_X + M_L) \qquad (112)$$

k = a, b, c .... O significado do valor Q da reação de fusão é, de acôrdo com a Eq. (101), $Q = T_f^{ext} - T_i^{ext}$.

As reações de fusão podem ser divididas em duas classes:

1) $Q < 0$, o que implica que $T_f < T_i$, o que do ponto de vista utilitário não tem interêsse, pois a energia T_i fornecida no início é maior do que aquela T_f liberada pela reação de fusão. Êsse tipo de fusão NÃO OCORRE, pois, EXPONTÂNEAMENTE, i.e., se $T_i = 0$ deveríamos ter $T_f < 0$, o que é absurdo. As reações de fusão com $Q < 0$ só tem interêsse para o físico profissional.

2) $Q > 0$, o que implica $T_f > T_i$, o que do ponto de vista utilitário é interessante, pois êsse tipo de reação de fusão produz um GANHO DE ENERGIA CINÉTICA. Ainda mais as REAÇÕES DE FUSÃO COM $Q > 0$ PODEM OCORRER EXPONTÂNEAMENTE, i.e., mesmo se $T_i = 0$ teremos $T_f > 0$, o que significa que a reação é possível.

P. Demonstre que numa reação de fusão com $Q < 0$, o valor $-Q$ representa a energia cinética INICIAL mínima capaz de provocar a fusão, produzindo um núcleo fundido em repouso. Qual é o referencial do CM?

P. Na reação de fusão, um raio γ pode ser emitido juntamente com o núcleo fundido. Nesse caso o Princípio da Conservação do Momentum nos mostra que o núcleo fundido não pode estar em repouso no CM, e que portanto possui uma energia cinética. Se E_γ é a energia do raio γ e M_X é a massa de repouso do núcleo fundido, calcule a energia cinética T_X do núcleo produzido. Nesse caso T_f será igual a $E_\gamma + T_X$. Observe que a maior parte da energia cinética no estado final é carregada pelo raio γ. No caso de $Q < 0$ calcule, então, a energia cinética INICIAL mínima capaz de provocar a fusão, e conclua que ela é MAIOR que $-Q$. Qual é o referencial do CM?

P. No caso de $Q > 0$ a reação de fusão pode ocorrer EXPONTÂNEAMENTE, i.e., mesmo se $T_i = 0$. Demonstre que se $Q > 0$ o VALOR Q representa a energia (cinética) liberada a partir da fusão expontânea dos núcleos.

P. Calcule o VALOR das seguintes reações de fusão e interprete os resultados:

$$n + {}_1H^1 \longrightarrow {}_1H^2 + \gamma$$

$${}_1H^1 + {}_1H^1 \longrightarrow {}_1H^2 + e^+ + \nu$$

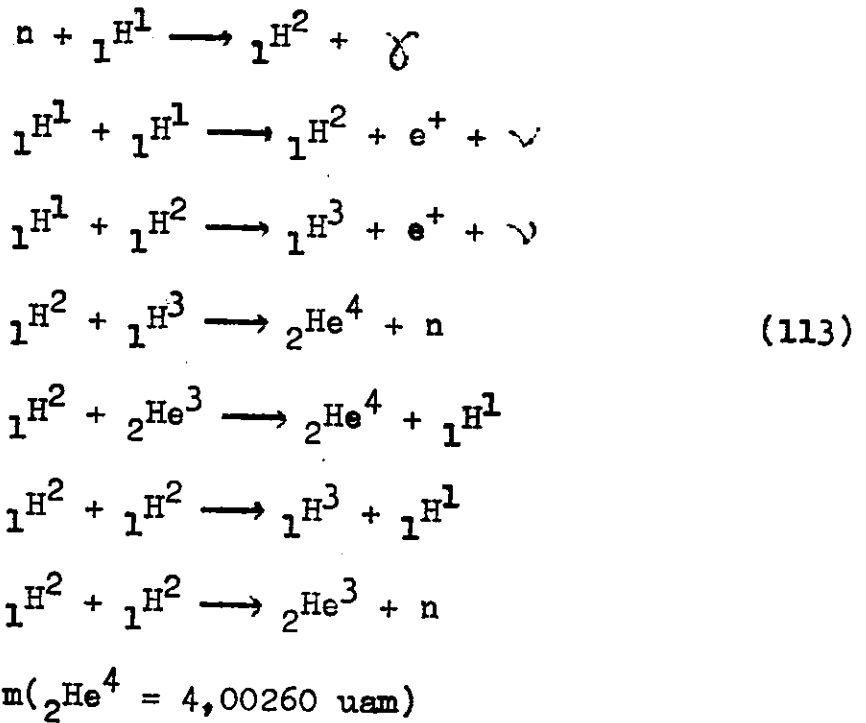
$${}_1H^1 + {}_1H^2 \longrightarrow {}_1H^3 + e^+ + \nu$$

$${}_1H^2 + {}_1H^3 \longrightarrow {}_2He^4 + n \qquad (113)$$

$${}_1H^2 + {}_2He^3 \longrightarrow {}_2He^4 + {}_1H^1$$

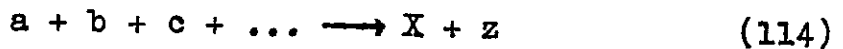
$${}_1H^2 + {}_1H^2 \longrightarrow {}_1H^3 + {}_1H^1$$

$${}_1H^2 + {}_1H^2 \longrightarrow {}_2He^3 + n$$

$$m({}_2He^4 = 4{,}00260 \text{ uam})$$

P. Calcule em cal/grama a ordem de grandeza das energias liberadas nas reações (113). Compare êsse valor com o calor liberado em reações químicas, por exemplo, com calor de combustão de matéria orgânica.

59. ENERGIA DE LIGAÇÃO

Quando as fôrças entre as partículas constituintes de um sistema são predominantemente atrativas, uma coleção dessas partículas tem a tendência a se juntar para formar um sistema estável. O VALOR de uma reação dêsse tipo (fusão, síntese, formação) é positivo e representa o "calor" liberado durante a reação. Escrevendo a reação de síntese de um sistema X a partir das suas partes elementares a, b, c, ...

$$a + b + c + \ldots \longrightarrow X + z \qquad (114)$$

onde z é uma (ou mais) partícula de massa de repouso nula que, para conservar o momentum, carrega a maior parte da ener

gia cinética externa no final da reação. A energia cinética de z normalmente aparece sob a forma de calor. É o caso, por exemplo, das reações químicas exotérmicas. O VALOR Q da reação (114) é chamado a ENERGIA DE LIGAÇÃO $\mathcal{L}$ do sistema X, ou seja,

$$\boxed{\mathcal{L}_X = Q_{\text{síntese}}} \qquad (115)$$

onde $\mathcal{L}_X$ é a energia de ligação do sistema X e $Q_{\text{síntese}}$ o VALOR da sua reação de síntese.

0. A ENERGIA DE LIGAÇÃO DOS NÚCLEOS ATÔMICOS

Seja ${}_Z X^A$ um núcleo atômico constituído de Z prótons e N (= A - Z) neutrons. A reação de síntese dêsse núcleo seria

$$Zp + Nn \longrightarrow {}_Z X^A + z \qquad (116)$$

onde z é ainda uma partícula conveniente de massa de repouso nula.

P. Escreva a reação de síntese dos núcleos, ${}_1H^2$, ${}_1H^3$, ${}_2He^3$, ${}_2He^4$, ${}_2He^5$, ${}_2He^6$, ${}_3Li^5$, ${}_3Li^6$, ${}_3Li^7$, ${}_3Li^8$ e ${}_3Li^9$.

Por definição, Eq. (114), a energia de ligação do núcleo ${}_Z X^A$ é o Q da reação de síntese (115), i.e.,

$$\boxed{\mathcal{L} \hat{=} Z\, m_{op} + N\, m_{on} - M_{oX}} \qquad (117)$$

P. Calcule em MeV a energia de ligação dos núcleos constantes da Tabela seguinte, completando-a.

Z	Isótopo	Abundância natural (%)	Massa atômica	Vida Média	Modos de desintegração	Energia de desintegração (MeV)	Energia de Ligação $\mathcal{L}$ MeV	Energia de Ligação por partícula $\mathcal{L}/A$
	n^1		1,008665	12 m	β^-	0,78		
1	$_1H^1$	99,985	1,007825					
	$_1H^2$	0,015	2,0140					
	$_1H^3$		3,01605	12,26 a	β^-	0,019		
2	$_2He^3$	0,00013	3,01603					
	$_2He^4$	100	4,00260					
	$_2He^5$		5,0123					
	$_2He^6$		6,01888	0,81 s	β^-	3,5		
	$_2He^8$		8,0375	0,12 s	β^-	13		
3	$_3Li^5$		5,0125					
	$_3Li^6$	7,42	6,01512					
	$_3Li^7$	92,58	7,01600					
	$_3Li^8$			0,85 s	β^-, α	13		
	$_3Li^9$			0,17 s	β^-	13,5		
4	$_4Be^6$		6,0197					
	$_4Be^7$		7,0169	53 d	CE	0,86		
	$_4Be^8$		8,0053	10^{-16} s	α			
	$_4Be^9$	100%	9,01218					
	$_4Be^{10}$		10,0135	10^6 a	β^-	0,55		

Do significado do VALOR de uma reação, $Q = T_f - T_i$ e da definição da energia de Ligação, Eq. (116), podemos concluir que a energia de ligação $\mathcal{L}$ representa a energia cinética no final da reação de síntese, energia cinética essa que, já sabemos, normalmente aparece com energia cinética da partícula z (de massa de repouso nula), sendo que a energia cinética de recuo núcleo X sintetizado é desprezível. Portanto, se $\mathcal{L} > 0$ significa que o núcleo pode ser sintetizado expontâneamente ($T_i = 0$) com liberação de calor, ao passo que se $\mathcal{L} < 0$, a reação de síntese (116) só poderia ocorrer se fornecêssemos suficiente energia cinética aos prótons e neutrons. Êsses núcleos, no entanto, não são LIGADOS

P. Se $\mathcal{L}$ resulta > 0, o que pode ser concluído da reação inversa da 116, i.e.,

$$_{Z}X^{A} \longrightarrow Zp + Nn \tag{118}$$

e portanto em relação à vaporização completa do núcleo $_{Z}X^{A}$

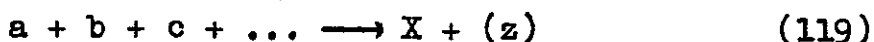
No domínio da Física Nuclear a utilidade do conceito de VALOR é que A PARTIR DAS MASSAS DE REPOUSO DOS REAGENTES PODEMOS CALCULAR O CALOR LIBERADO NA REAÇÃO. No domínio da Química acontece justamente o opôsto como será discutido a seguir.

61. A ENERGIA DE LIGAÇÃO QUÍMICA

Na síntese da MOLÉCULA (sistema não ideal) de um compôsto químico os núcleos dos átomos permanecem inalterados. São os ÁTOMOS dos diversos elementos que se unem uns aos outros para formar um novo objeto: a molécula do compôsto. Por exemplo, a síntese do monóxido de carbono se processaria pela união íntima de um ÁTOMO de Carbono com um átomo de Oxigênio. Nessa união, mesmo que ÍNTIMA entre ÁTOMOS

a intimidade do núcleo de Carbono é preservada, da mesma forma que a do núcleo de Oxigênio. No entanto, essa síntese do monóxido de Carbono se dá, EM PRINCÍPIO, a partir de um SISTEMA IDEAL (i.e., gasoso diluído) de ÁTOMOS de Carbono e ÁTOMOS de Oxigênio, resultando como estado final um SISTEMA IDEAL (i.e., gasoso diluído). Podemos pois, aplicar, a essas reações de síntese, os conceitos até aquí elaborados, em particular o conceito de VALOR da reação.

No caso de uma reação QUÍMICA de síntese

$$a + b + c + \ldots \longrightarrow X + (z) \qquad (119)$$

a, b, c ... são ÁTOMOS dos elementos constituintes da molécula X. Um FÓTON (z) pode, ou não, ser emitido juntamente com a molécula X. A conservação do momentum pode, pois, se realizar de uma maneira complexa. De qualquer forma a energia cinética dos produtos finais reflete o calor de reação.

O VALOR da reação na fase gasosa (119) representa, por se tratar de sistemas ideais, a variação da energia cinética produzida pela reação. Ao contrário do caso de uma reação nuclear, o VALOR de uma reação química não pode ser calculado a partir das massas atômicas, pois o déficit de massa produzido por uma reação química é indetectável. De fato, o calor gerado por reações químicas é da ordem de várias kcal/mol, i.e., 10^3 joule/10^{23} moléculas $\approx$ 1 eV, o que corresponde a 10^{-9} uam. Seria necessário, pois, pesagens com precisão de uma parte em 10^9 para se detectar as variações de massa produzida por reações químicas. Na realidade só podemos MEDIR o calor liberado pela reação e dessa medida inferir propriedades da molécula. Para isso precisamos conhecer um outro significado do VALOR Q de uma reação, em têrmos da energia de interação.

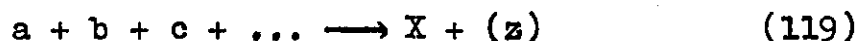
62. UM OUTRO SIGNIFICADO DO VALOR Q DE UMA REAÇÃO DE SÍNTESE

O significado do valor Q de uma reação, definido pela Eq. (100), depende da natureza dos sistemas envolvidos na reação. Por exemplo, no caso em que tanto o sistema inicial como o final são sistemas ideais, o significado do VALOR da reação é dado pela Eq. (101), ou seja, o VALOR da reação representa a variação da energia cinética externa produzida pela reação.

Êsse significado ainda permanece válido no caso de uma reação de síntese, se os estados inicial e final forem SISTEMAS IDEAIS. É o caso da síntese de um núcleo atômico, ou da síntese de um compôsto na fase gasosa dispersa.

No entanto, o VALOR Q tem também um outro significado, que nos dá informação acêrca das interações DENTRO do sistema formado.

De fato, em vez de trilhar o caminho, i.e., a Eq. (99), que nos levou à Eq. (101), vamos analisar as parcelas que contribuem para a massa de repouso do produto da reação de síntese,

$$a + b + c + \ldots \longrightarrow X + (z) \qquad (119)$$

dentro da APROXIMAÇÃO DA FÍSICA CLÁSSICA, ou seja, para o caso em que as velocidades das partículas a, b, c, ... DENTRO do sistema X (núcleo ou molécula), sejam muito menores que a velocidade da luz, o que implica que o Q da reação deve ser pequeno comparado com a energia de repouso da partícula X. Essa aproximação cobre todos os casos de interêsse na FÍSICA ATÔMICA, FÍSICA NUCLEAR e na QUÍMICA.

Dentro da aproximação clássica, a massa de repouso da partícula X, pode ser escrita, cf. Eq. (90),

$$M_{oX} = \sum m_{o,k} + \sum t_k^{CM} + U = \sum m_{o,k} + E_{int} \qquad (120)$$

onde k = a, b, c, ... são as partículas constituintes da partícula maior X, e U é a energia potencial total, e E_{int} é a energia interna.

Da definição de VALOR da reação (118)

$$Q = \sum m_{o,k} - M_{o,X}$$

temos, usando a expressão (120) para $M_{o,X}$

$$\boxed{Q_{síntese} = -\left(\sum t_k^{CM} + U\right) = -E_{int}} \qquad (121)$$

Da Eq. (120) concluímos pois, que numa reação de síntese o VALOR da reação é igual (em módulo) à ENERGIA INTERNA. As reações de síntese de sistemas estáveis são exotérmicas ($Q > 0$), o que significa que a energia interna de sistemas estáveis é NEGATIVA.

Ainda mais, da definição de energia de ligação $\mathcal{L}$ de um sistema, Eq. (115), $\mathcal{L} = Q_{síntese}$, concluímos que A ENERGIA DE LIGAÇÃO DE UM SISTEMA É IGUAL À SUA ENERGIA INTERNA (com o sinal trocado).

63. OS SISTEMAS DA FÍSICA ATÔMICA

A Física Atômica estuda a constituição dos átomos, considerando-os como formados de NÚCLEOS e ELÉTRONS. A energia de interação entre núcleos e elétrons nos átomos reais é da ordem de eV. Isso implica que informações acêrca da energia de ligação, movimentos internos e interações entre os elétrons e núcleos não podem ser obtidos nem pelos métodos calorimétricos da Química (porque não podemos sintetizar ÁTOMOS por falta de estoque dos reagentes: elétrons e núcleos) e nem através de déficits de massa que são muito pequenos. No entanto, é justamente a Física Atômica aquêle domínio em que a estrutura íntima dos sistemas é mais bem conhecida. Isso é devido aos métodos experimentais altamente desenvolvidos da Espectroscopia que nos permitem analisar com

precisão as radiações (fótons) emitidas pelos ÁTOMOS na sua vicissitude. Êsse assunto será estudado com algum detalhe em capítulos posteriores. Nessa altura queremos apenas exemplificar a natureza do problema.

Da colisão entre um elétron e um próton, p + e, resulta a formação de um átomo neutro de hidrogênio e a emissão de um fóton de energia da ordem de eV que corresponde a uma radiação visível (visível porque NÓS somos SISTEMAS análogos aos ÁTOMOS, e por isso é possível SINTONIA). Essa reação é semelhante à reação de formação do deuteron, exceto pela massa do elétron e pela energia do fóton emitido. Vamos simbolizar a reação de formação do ÁTOMO de Hidrogênio por

$$p + e \longrightarrow H + f \qquad (122)$$

onde o FÓTON está representado pela letra f, em vez de γ, por razões históricas.

Uma peculiaridade dos ÁTOMOS é que o FÓTON f pode sair com várias energias. Para um dado átomo, por ex., para o átomo de Hidrogênio, essas energias dos fótons são bem determinadas, i.e., são sempre as mesmas, embora não se possa predizer qual deles será emitido numa colisão particular do tipo (122).

Analisemos a reação de síntese, do átomo de hidrogênio, Eq. (122), no caso em que a energia cinética é baixa (senão resulta apenas o espalhamento, e não a formação de um átomo neutro de Hidrogênio, anàlogamente à reação (p, n) já discutida).

Do fato de que o fóton tem energia E_f pequena, da ordem de eV, comparada com a massa de repouso do átomo de Hidrogênio, podemos concluir que a energia cinética de recuo do átomo de hidrogênio é desprezível.

P. Mostre que no CM a energia cinética T_H devido ao recuo do átomo de H será igual a $T_H = E_f\left(\frac{E_f}{2\, m_H c^2}\right)$, portanto da ordem de 10^{-9} eV.

P. Mostre que no CM a velocidade do átomo de H será $v_H/c = E_f/m_H c^2$, o que corresponde a alguns cm/seg, sòmente.

Do fato que tanto o próton como o elétron têm energias cinéticas pequenas podemos concluir que o referencial do CM pràticamente coincide com o laboratório.

O Princípio da Conservação da Energia no CM nos dá

$$m_{op} + m_{oe} + T_p^{CM} + T_e^{CM} = M_{oH} + T_H^{CM} + E_f \qquad (123)$$

que pelas considerações acima pode ser aproximada por

$$m_{op} + m_{oe} + T_o^{CM} = M_{oH} + E_f \qquad (124)$$

onde T_o é a energia cinética do próton e do elétron incidentes, que embora pequenas comparadas com os m_o, é da mesma ordem que E_f. Porém, no CM a energia cinética do próton é desprezível comparada com a do elétron devido à grande disparidade de massa.

P. Calcule a razão T_e^{CM}/T_p^{CM} no CM dêles. Conclua que $T_o \cong T_e$.

Da definição de Q, Eq. (100), $Q = m_{op} + m_{oe} - M_{oH}$, e da Eq. (123) temos

$$Q = E_f - T_{oe}^{CM} \qquad (125)$$

ou seja, a energia do fóton emitido será o VALOR da reação, acrescido da energia cinética inicial do elétron. Por outro lado, um dos significados do VALOR de uma reação de síntese era dado pela Eq. (120),

$$Q = -\left(\sum t_k^{CM} + U\right) = -E_{int}$$

onde E_{int} é a energia interna do átomo sintetizado, i.e.,

$$Q = -(t_p^{CM} + t_e^{CM} + U) \qquad (126)$$

e já que, devido a disparidade de massa, novamente a energia cinética do próton t_p^{CM} dentro do átomo de H é muito menor que a do elétron, temos

$$Q = -(t_e^{CM} + U) \qquad (127)$$

Já demonstramos que o referencial do CM coincide pràticamente com o LAB, e que no CM a velocidade do átomo de H é pràticamente nula, o que significa que o referencial do CM coincide pràticamente com o átomo de H. Assim, as Eqs. (125) e (127) nos dão

$$Q = E_f - T_{oe} \qquad (128)$$

e

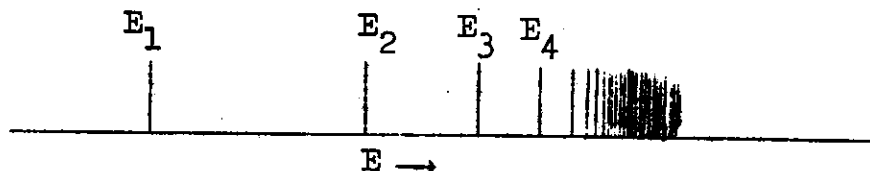
$$Q = -(t_e + U) \qquad (129)$$

onde as energias são referidas do átomo de H, ou ao seu núcleo, ou ao LAB sem diferença importante.

Comparando as Eqs. (128) e (129) temos

$$E_f = T_{oe} - (t_e + U) = T_{oe} - E_{int} \qquad (130)$$

Da Eq. (130) vemos que a medida da energia E_f do fóton nos dará informação acêrca da energia interna do átomo de H, ou seja, da energia cinética e potencial do elétron em tôrno do núcleo do átomo.

Analisando as energias dos fótons produzidos na reação de formação do Hidrogênio observamos que o fóton é emitido com várias energias, porém tôdas elas bem determinadas, como ilustra o gráfico abaixo.

É problema da Física Atômica deduzir a partir das energias dos fótons E_1, E_2, E_3, ..., os detalhes do movimento do elétron em tôrno do núcleo, tanto no átomo de Hidrogênio, como em átomos mais complexos.

64. A MASSA REDUZIDA

Na aproximação clássica a energia cinética interna do átomo de Hidrogênio, i.e., $t_p^{CM} + t_e^{CM}$, pode fàcilmente ser escrita em têrmos da velocidade interna RELATIVA, i.e., a velocidade do elétron em relação ao próton. De fato na aproximação clássica temos

$$t_p^{CM} + t_e^{CM} = \frac{1}{2} m_{op}(\vec{v}_p^{CM})^2 + \frac{1}{2} m_{oe}(\vec{v}_e^{CM})^2 \qquad (131)$$

Procuremos determinar o número μ (com dimensões de massa, òbviamente) tal que

$$\frac{1}{2} m_{op}(\vec{v}_p^{CM})^2 + \frac{1}{2} m_{oe}(\vec{v}_e^{CM})^2 = \frac{1}{2} \mu(\vec{v}_e^{p})^2 \qquad (132)$$

Como na aproximação clássica, $\vec{v}_e^p = \vec{v}_e^{CM} - \vec{v}_p^{CM}$, a Eq. (132) nos dá

$$\frac{1}{2} m_{op}(\vec{v}_p^{CM})^2 + \frac{1}{2} m_{oe}(\vec{v}_e^{CM})^2 = \frac{1}{2} \mu(\vec{v}_e^{CM} - \vec{v}_p^{CM})^2 \qquad (133)$$

da qual podemos determinar μ, para que a igualdade seja verdadeira. Expandindo o segundo membro temos

$$\frac{1}{2} m_{op}(\vec{v}_p^{CM})^2 + \frac{1}{2} m_{oe}(\vec{v}_e^{CM})^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \mu(\vec{v}_e^{CM})^2 + \frac{1}{2} \mu(\vec{v}_p^{CM})^2 - \mu\vec{v}_e^{CM} \cdot \vec{v}_p^{CM} \qquad (134)$$

Como, por definição de CM, $m_e\vec{v}_e^{CM} + m_p\vec{v}_p^{CM} = 0$, o último têrmo

da Eq. (134) pode, na aproximação clássica ($m_e \cong m_{oe}, m_p \cong m_{op}$), ser escrito sob uma das formas

$$\mu \vec{v}_e^{CM} \cdot \vec{v}_p^{CM} = -\mu (v_e^{CM})^2 \frac{m_{oe}}{m_{op}} \overset{ou}{=} -\mu (v_p^{CM})^2 \frac{m_{op}}{m_{oe}} \overset{ou}{=}$$

$$= -\frac{1}{2} \mu \left[(v_p^{CM})^2 \frac{m_{op}}{m_{oe}} + (v_e^{CM})^2 \frac{m_{oe}}{m_{op}} \right] \qquad (135)$$

A última forma da Eq. (135) é a mais conveniente para nossos propósitos. Substituída na Eq. (134) ela nos dá

$$\frac{1}{2} m_{op} (v_p^{CM})^2 + \frac{1}{2} m_{oe} (v_e^{CM})^2 =$$

$$= + \frac{1}{2} \mu (v_p^{CM})^2 \left[1 + \frac{m_{op}}{m_{oe}} \right] + \frac{1}{2} \mu (v_e^{CM})^2 \left[1 + \frac{m_{oe}}{m_{op}} \right]$$

Comparando os coeficientes de v_p^2 e v_e^2 temos

$$m_{op} = \mu \left(1 + \frac{m_{op}}{m_{oe}} \right)$$

e

$$m_{oe} = \mu \left(1 + \frac{m_{oe}}{m_{op}} \right)$$

Multiplicando a primeira equação por m_{oe} e a segunda por m_{op} temos

$$m_{oe} \, m_{op} = \mu (m_{oe} + m_{op})$$

e

$$m_{op} \, m_{oe}^2 = \mu (m_{op} + m_{oe})$$

que nos dão a mesma coisa, ou seja,

$$\mu = \frac{m_{oe}\, m_{op}}{m_{oe} + m_{op}} \tag{136}$$

ou, invertendo a fração:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_{oe}} + \frac{1}{m_{op}} \tag{137}$$

A massa μ se chama a MASSA REDUZIDA. Note que a massa reduzida de duas partículas com grande disparidade de massa de repouso, é aproximadamente igual a massa MENOR.

P. Calcule a massa reduzida de um próton e um elétron.

P. Calcule a massa reduzida de um próton e um neutron.

Introduzido o conceito de massa reduzida, podemos escrever a energia cinética interna da Eq. (126) na aproximação clássica como

$$t_e^{CM} + t_p^{CM} = \frac{1}{2} \mu\, v_r^2$$

onde v_r é a velocidade relativa, i.e., $v_r \triangleq v_e^p$.

A massa reduzida representa no átomo de Hidrogênio, uma correção da ordem de uma parte em 2000 (i.e., m_p/m_e), ou seja, $5 \cdot 10^{-4}$, e deve ser levada em conta quando se requer precisão dessa ordem.

65. EPÍLOGO

Da discussão dos §§ 60-64 concluímos que:

1) Na QUÍMICA, o CALOR de reação e a energia dos fóton nos dão informação acêrca da energia de ligação, movimentos internos e interações dos ÁTOMOS que forma as MOLÉCULAS.

2) Na FÍSICA ATÔMICA a energia das RADIAÇÕES (FÓTONS) emitidas nos dá informação acêrca da energia de lig ção, movimentos internos e interações entre os NÚCLEO e os ELÉTRONS que constituem os ÁTOMOS.

3) Na FÍSICA NUCLEAR o DÉFICIT DE MASSA e a energia do fótons emitidos nos dão informação acêrca da energi de ligação, movimentos internos e interações entre os NEUTRONS e PRÓTONS que formam os NÚCLEOS.